PD. Dr. P. H. Lesky / M. Ritter Zur Übung am 26. Juni 2018

Übungen zur Schulmathematik

Blatt 9

Aufgabe 33 (Integration durch geschickte Substitution)
Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}}\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-12x+8}}\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-12x+10}}\mathrm{d}x$

Aufgabe 34 (Integration durch noch geschicktere Substitution: Weierstraß-Substitution)
Die sogenannte *Weierstraß* -Substitution ist gegeben durch $\tan\frac{x}{2} = t$.

a) Stellen Sie $\sin x$ und $\cos x$ als rationale Funktionen von t dar.

b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$.

c) Zeigen Sie, dass das unbestimme Integral $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ für jede rationale Funktion R analytisch bestimmt werden kann.

Aufgabe 35 (Basis einer einfachen algebraischen Körpererweiterung)
Seien $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L \subseteq \mathbb{C}$ Körper. Gibt es $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$, so heißt L *einfach* über K.
Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ über K algebraisch mit Minimalpolynomn $\mu_{\alpha,K}$ von Grad $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass $A := \{\alpha^j : 0 \leq j \leq n-1\}$ über K linear unabhängig ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{span}_K(A)$ einen Körper bildet.

c) Folgern Sie den Körpergrad $(K(\alpha) : K)$.

Aufgabe 36 (Auf der Suche nach Zwischenkörpern)
Seien $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L \subseteq \mathbb{C}$ Körper. Sei $\alpha \in Ł$ über K algebraisch mit Minimalpolynom $\mu_{\alpha,K}$.

a) Es sei $(L : K) = n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\deg\alpha := \deg\mu_{\alpha,K}$ ein Teiler von n.

b) Finden sie für jeden positiven Teiler k von m einen Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq M \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[m]{2})$ von Grad $(M : \mathbb{Q}) = k$