

Übungen zur Schulmathematik

Blatt 10

Aufgabe 37 (Charakterisierung endlicher Körpererweiterungen)

Sei L ein Erweiterungskörper von K . Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (1) Es ist $(L : K) < \infty$.
- (2) Es existieren über K algebraische Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ so, dass mit $K_1 := K(\alpha_1)$ und $K_i := K_{i-1}(\alpha_i)$ für $i \geq 1$ gilt, dass $L = K_n$.

Aufgabe 38 (Elementare Konstruktionen)

- a) Verwenden Sie den Höhensatz um die Wurzel einer Zahl zu konstruieren.
- b) Gegeben seien Strecken der Längen a und b . Zeigen Sie, dass Strecken der Längen $a + b$, $|a - b|$, $a \cdot b$ und, für $b \neq 0$, $\frac{a}{b}$ konstruierbar sind. *Hinweis: Strahlensatz.*

Aufgabe 39 (Dreiteilung des Winkels nach Archimedes)

Gegeben sei der spitze Winkel $\alpha = \angle BAX$. Wir führen folgende Konstruktionsschritte durch.

- 1) Verlängern Sie die Strecke XA zur Halbgeraden g mit Endpunkt X . Zeichnen Sie in A einen Kreis mit Radius $r = \overline{AB}$.
- 2) Markieren Sie auf dem Lineal eine Strecke der Länge r . Bezeichnen Sie deren Endpunkte mit C und D .
- 3) Legen Sie das Lineal so auf g , dass C außerhalb des Kreises und gegenüber von X , und D auf dem Kreis liegt. Verschieben Sie C auf g in Richtung Kreis so, dass D auf dem Kreis in Richtung B wandert, bis B auf der Verlängerung der Strecke CD liegt. Zeichnen Sie nun die Strecke CB ein.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben.

- a) Fertigen Sie eine Zeichnung an, die die obige Konstruktion veranschaulicht.
- b) Zeigen Sie, dass $\angle BCA = \frac{\alpha}{3}$ bzw. .
- c) Erklären Sie, warum dieses Konstruktionsverfahren nicht im Widerspruch dazu steht, dass die Dreiteilung des Winkels mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist.
- d) Überlegen Sie sich, wie man das Konstruktionsverfahren auf beliebige Winkel ausdehnt.

Aufgabe 40 (Konstruktion ganzzahliger Winkel)

Zeigen Sie, dass ein ganzzahliger Winkel α zwischen 0° und 360° genau dann konstruierbar ist, wenn $\alpha = k \cdot 3^\circ$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$, d.h. wenn α durch 3 teilbar ist.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass 3° konstruierbar ist. Für die andere Implikation ist ein Widerspruchsbeweis empfehlenswert.

Hinweis: Diese Aufgabe setzt die Vorlesung vom 28.06.18 voraus.