Übungen zur Schulmathematik

Blatt 11

Aufgabe 41 (Faltkonstruktion zur Winkeltrisektion)
Gegeben sei ein rechtwinkliges Blatt Papier mit Eckpunkten A, B, C und D. Auf der Kante AD sei der Punkt P gegeben. Wir führen folgende Faltkonstruktion durch.

1) Falten Sie die Strecke BP. Falten Sie eine beliebige Parallele EF zu BC, wobei E auf der Kante AB liegen soll. Falten Sie anschließend die Mittelparallele GH von EF und BC.

2) Falten Sie die Ecke B so ab, dass E auf BP und gleichzeitig B auf GH liegt. Bezeichnen Sie die jeweiligen Bildpunkte mit E' und B'.

3) Falten Sie das Blatt auf. Bezeichne I den Schnittpunkt der letzten Faltkante mit GH.

Zeigen Sie, dass der Winkel $\alpha = \angle CBP$ durch die Linien BB' und BI gedrittelt wird. Erklären Sie warum diese Faltkonstruktion keine Trisektion des Winkels mit Zirkel und Lineal darstellt.

Hinweis: Es empfiehlt sich EF ungefähr in der Mitte des Blatts zu wählen.

Aufgabe 42 (Faltkonstruktion von $\sqrt[3]{2}$)
Gegeben sei ein quadratisches Blatt Papier mit Eckpunkten A, B, C und D. Teilen Sie das Blatt durch das Falten von zwei Parallelen zu AB in drei gleiche parallele Teile. Die damit ausgezeichneten Punkte auf dem Rand des Quadrats, begonnen mit der linken unteren Ecke A gegen den Uhrzeigersinn, heißen A, B, E, G, C, D, H und F. Falten Sie die Ecke B so ab, dass B auf AD und gleichzeitig E auf GH zu liegen kommt. Bezeichnen Sie die Bildpunkte mit B' bzw. E'.

Zeigen Sie, dass $\dfrac{\overline{B'D}}{\overline{AB'}} = \sqrt[3]{2}$.

Aufgabe 43 (Glaserkonstruktion des regelmäßigen Siebenecks)
In einem Fachbuch für Glaser wird folgende Näherungskonstruktion für das regelmäßige Siebeneck vorgeschlagen.

1) Zeichnen Sie einen Kreis mit Mittelpunkt O. Wählen Sie einen Punkt A auf dem Kreis und zeichnen Sie den Durchmesser durch A. Zeichnen Sie anschließend den zu OA orthogonalen Durchmesser.

2) Zeichnen Sie um A einen Kreis mit Radius $r := \overline{OA}$. Dieser schneidet den Kreis um O in den Punkten B und C.

3) Zeichnen Sie die Strecke BC. Diese schneidet OA im Punkt D. Tragen Sie die Länge $t := \overline{BD}$ beginnend in A sieben Mal auf dem Kreis ab.

Führen Sie diese Konstruktion durch und untersuchen Sie ihre Güte, d.h. bestimmen Sie $\dfrac{|s-t|}{r}$, wobei s die exakte Seitenlänge des regelmäßigigen Siebenecks mit Umkreisradius r bezeichnet.

Aufgabe 44 (Symmetriegruppe eines regelmäßigen Dreiecks)
Betrachten Sie ein regelmäßiges Dreieck mit Eckpunkten A, B und C. Eine *Symmetrie* des Dreiecks ABC ist eine Bewegung der euklidischen Ebene, die ABC auf ABC abbildet.

Im Folgenden wollen wir die Symmetriegruppe $\mathrm{Sym}(ABC)$ des Dreiecks ABC beschreiben.

a) Finden Sie alle Spiegeleachsen des Dreiecks ABC.

b) Für einen Punkt P und einen Winkel $\phi \in [0, 2\pi)$ bezeichne (P, ϕ) die Drehung mit Fixpunkt P umd den Winkel ϕ. Finden Sie alle Drehungen (P, ϕ) mit $(P, \phi) \in \mathrm{Sym}(ABC)$.

c) Überlegen Sie sich, dass Sie mit a) und b) alle Elemente von $\mathrm{Sym}(ABC)$ gefunden haben.

d) Stellen Sie die Verknüpfungstabelle von $\mathrm{Sym}(ABC)$ auf.

Algebraische Zusatzfrage: Zu welcher (abstrakten) Gruppe ist $\mathrm{Sym}(ABC)$ *isomorph?*