

Übungen zur Schulmathematik

Blatt 12

Aufgabe 45 (Untergruppen von Index 2 und Normalteiler)

Sei H ein Untergruppe der Gruppe (G, \cdot) . Bezeichne $|G : H|$ den Index von H in G .

- Sei $|G : H| = 2$. Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler von G ist.
- Finden Sie eine nicht-abelsche endliche Gruppe G mit Normalteiler H so, dass $|G : H| \geq 3$.

Aufgabe 46 (Symmetriegruppe des regelmäßigen n -Ecks)

Ziel dieser Aufgabe ist es $D(n)$, die Symmetriegruppe des regelmäßigen n -Ecks, zu beschreiben.

- Finden Sie alle Drehungen d der euklidischen Ebene mit $d \in D(n)$. Bezeichne $R(n)$ die Menge alle Drehungen $d \in D(n)$. Zeigen Sie, dass $R(n)$ eine Gruppe bildet. Zu welcher (abstrakten) Gruppe ist $R(n)$ isomorph?
- Finden Sie alle Spiegelachsen des regelmäßigen n -Ecks.
- Überlegen Sie sich, wie durch Komposition einer gewissen Drehung $x \in R(n)$ und einer beliebigen Spiegelung s des n -Ecks alle $d \in D(n)$ beschrieben werden können.
- Finden Sie $|D(n) : R(n)|$, $|D(n)|$ und zeigen Sie, dass $R(n)$ ein Normalteiler von $D(n)$ ist.

Aufgabe 47 (Symmetriegruppe des Tetraeders)

Ziel dieser Aufgabe ist es T , die Symmetriegruppe des Tetraeders, zu beschreiben.

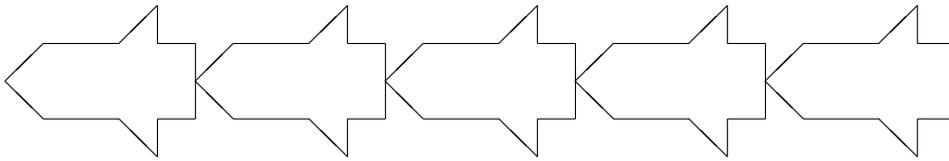
- Finden Sie alle Spiegelebenen des Tetraeders. Skizzieren Sie einige dieser Ebenen.
- Finden Sie alle Drehachsen und Drehwinkel des Tetraeders. Skizzieren Sie exemplarisch.
- Überlegen Sie sich, wie man durch Komposition von möglichst wenigen verschiedenen Drehungen und Spiegelungen alle Symmetrien des Tetraeders erzeugen kann.
- Finden Sie $|T|$. Zeigen Sie, dass die Drehungen einen Normalteiler von Index 2 bilden.

Algebraische Zusatzfrage: Zu welcher (abstrakten) Gruppe ist T isomorph?

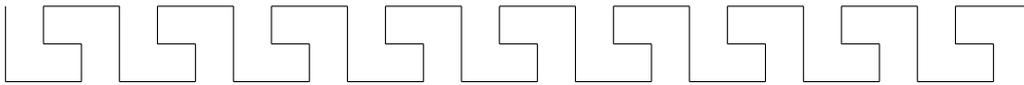
Aufgabe 48 (Frieze und Friesgruppen)

Zeichnen Sie alle vorkommenden Spiegelachsen und Drehzentren sowie die kürzeste Verschiebung in die abgebildeten Muster ein. Untersuchen Sie, ob es sich um ein Fries handelt, ob es Gleitspiegelungen enthält und bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörige Friesgruppe.

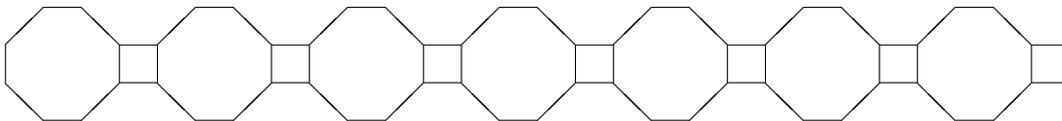
1.



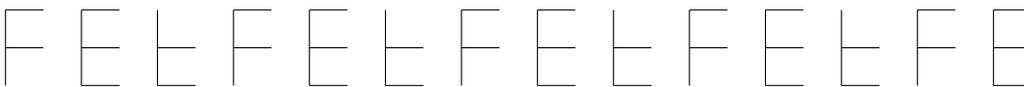
2.



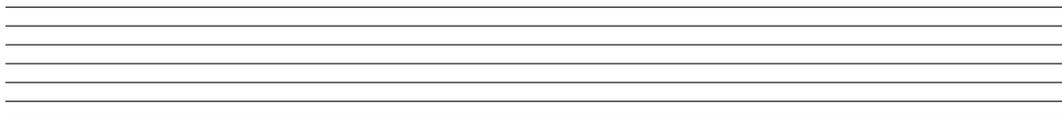
3.



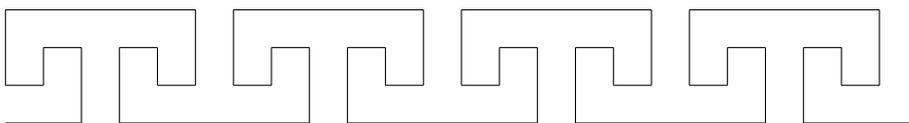
4.



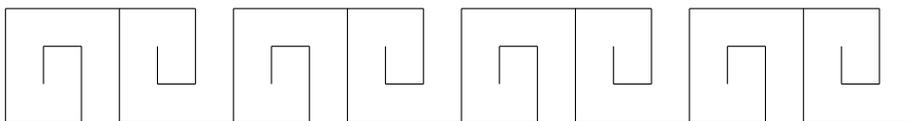
5.



6.



7.



8.

