Beispiel für einen nicht archimedischen Körper

Es sei

$$\mathbb{K} := \left\{ f : z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)} \;\middle|\; P, Q \text{ Polynome ohne gemeinsame Nullstelle} \right\}$$

Schreibe $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ und nicht $f(z) = \dfrac{z^2-2z+1}{z^2-1}$. Die erste Funktion ist eine stetige Ergänzung der zweiten. In $\mathbb{K}$ sind also alle Funktionen soweit wie möglich stetig ergänzt. Bei der Addition und Multiplikation addiert bzw. multipliziert man einfach die Funktionsterme und ergänzt dann wieder stetig, soweit das möglich ist:

Für $f_1 = \dfrac{P_1}{Q_1}$, $f_2 = \dfrac{P_2}{Q_2} \in \mathbb{K}$ definiert man

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 &:= \frac{P_1\,Q_2 + P_2\,Q_1}{Q_1\,Q_2}, \\ f_1 \cdot f_2 &:= \frac{P_1\,P_2}{Q_1\,Q_2}, \end{aligned}$$

wobei auf den rechten Seiten alle gemeinsamen Polynomteiler $z - a$ von Zähler und Nenner weggekürzt werden. Z.B.

$$\begin{aligned} & f_1 : \mathbb{C} \setminus \{2, -2\} \to \mathbb{C} : z \mapsto \frac{z^2 - z}{z^2 - 4}, \\ & f_2 : \mathbb{C} \setminus \{2, -2\} \to \mathbb{C} : z \mapsto \frac{2z - 2}{z^2 - 4} \\ \Rightarrow \quad & f_1 + f_2 : \mathbb{C} \setminus \{2\} : z \mapsto \frac{z-1}{z-2} \qquad \left(\frac{z-1}{z-2} = \frac{z^2 + z - 2}{z^2 - 4} \text{ für } z \neq \pm 2 \right) \end{aligned}$$

Dann ist $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (ohne Beweis). Dieser Körper heißt **Körper der meromorphen Funktionen**.

Auf $\mathbb{K}$ ist die Ordnungsrelation $\leq$ definiert durch

$$\left(z \mapsto \frac{a_n z^n + \ldots + a_0}{b_m z^m + \ldots + b_0} \right) < 0 \;:\Leftrightarrow\; \frac{a_n}{b_m} < 0, \qquad f_1 \leq f_2 \;:\Leftrightarrow\; f_1 - f_2 < 0 \;\vee\; f_1 = f_2.$$

Man kann nun zeigen, dass $(\mathbb{K}, \leq)$ ein geordneter Körper ist. Wie üblich schreibt man $f_1 < f_2$ für $f_1 \leq f_2 \;\wedge\; f_1 \neq f_2$, $f_1 \geq f_2$ für $f_2 \leq f_1$, und $f_1 > f_2$ für $f_2 < f_1$.

1) Bestimmen Sie alle Differenzen $f_j - f_k$ für die angegebenen Funktionen und ordnen Sie die Funktionen $f_1, \ldots, f_5$ der Größe nach.

$$f_1 : z \mapsto 10, \quad f_2 : z \mapsto 1000, \quad f_3 : z \mapsto z, \quad f_4 : z \mapsto \frac{z}{1000z + 1}, \quad f_5 : z \mapsto \frac{z}{1000z^2 + 1}.$$

2) Geben Sie das Einselement 1 in $\mathbb{K}$ an.

3) Durch $\Phi(1) := 1 \in \mathbb{K}$ und $\Phi(n+1) := \Phi(n) + 1 \in \mathbb{K}$ wird eine Abbildung $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ definiert. Geben Sie die Körperelemente $\Phi(n)$ an und beweisen Sie, dass Φ injektiv ist. Ab jetzt identifizieren wir $n \in \mathbb{N}$ und $\Phi(n) \in \mathbb{K}$.

4) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{K}, \leq)$ kein archimedischer Körper ist:
Mit $f : z \mapsto z$ gilt $f > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Folgern Sie, dass die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$ in $\mathbb{K}$ nicht gegen 0 konvergiert.

5) Sei

$$|f| := \begin{cases} f & \text{falls } f \geq 0, \\ -f & \text{falls } f < 0. \end{cases}$$

Gegeben sei

$$f_k : z \mapsto \frac{1}{z^k}.$$

Zeigen Sie, dass zu jedem $g \in \mathbb{K}$ mit $g > 0$ ein $N_g \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|f_k| < g$ für $k > N_g$. D.h. (f_k) konvergiert in $(\mathbb{K}, \leq)$ gegen 0.