Übungen zur Schulmathematik

Votieraufgaben

Aufgabe 1 (Euklidischer Algorithmus und kleinstes gemeinsames Vielfaches)
Berechnen Sie das kleinste gemeinsame Vielfache als $\mathrm{kgV}(a,b) = \frac{ab}{\mathrm{ggT}(a,b)}$ in folgenden Fällen.

a) $\mathrm{kgV}(1224, 1275) \in \mathbb{Z}$

b) $\mathrm{kgV}(1071, 861) \in \mathbb{Z}$

c) $\mathrm{kgV}(x^5 + 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 2, x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 8x - 6) \in \mathbb{Q}[x]$

Aufgabe 2 (Algebraische Zahlen und elementare Rechenoperationen)
Bezeichne $\mathbb{A}$ die Menge der reellen algebraischen Zahlen.

a) Sei $\alpha \in \mathbb{A}$. Zeigen Sie, dass $-\alpha \in \mathbb{A}$.

Was die restlichen Operationen angeht, möchten wir uns hier auf Beispiele beschränken.

b) Konstruieren Sie $p \in \mathbb{Q}[x]$ mit $p(\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}) = 0$.

c) Konstruieren Sie $s \in \mathbb{Q}[x]$ mit $s(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$.

d) Konstruieren Sie $q \in \mathbb{Q}[x]$ mit $q\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right) = 0$.

Allgemein gilt, dass $\mathbb{A}$ einen Teilkörper von $\mathbb{R}$ bildet. Dies folgt aus der Theorie der algebraischen Körpererweiterungen, die üblicherweise in einer Vorlesung über Algebra behandelt wird.

Aufgabe 3 (Es gibt mehr transzendente als algebraische Zahlen)

a) Zeigen Sie, dass die Menge der reellen algebraischen Zahlen abzählbar ist.

b) Zeigen Sie, dass die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist.

c) Folgern Sie, dass die Menge der transzendenten Zahlen überabzählbar ist.

Aufgabe 4 (Diagonale im gleichmäßigen Fünfeck)
Zeigen Sie, dass im gleichmäßigen Fünfeck Diagonale und Seite inkommensurabel sind.
Tipp: Zeichnen Sie im regelmäßgigen Fünfeck zunächst alle Diagonalen ein.

Aufgabe 5 (Umwandlungen von und in Kettenbrüche)
Stellen Sie die folgenden rationalen Zahlen als Kettenbrüche $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ mit $a_0 \in \mathbb{N}_0$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ dar.

a) $\dfrac{3}{8}$ b) $\dfrac{17}{39}$ c) $\dfrac{159}{124}$ d) $\dfrac{2374}{1593}$

Stellen Sie die folgenden endlichen Kettenbrüche als vollständig gekürzte Brüche dar.

e) $[1, 2]$ f) $[0, 7, 4]$ g) $[3, 5, 2, 9]$ h) $[0, 8, 1, 3, 2]$

Überprüfen Sie jeweils Ihr Ergebnis durch Rückumwandlung.

Aufgabe 6 (Kettenbrüche und modulare Arithmetik)
Sei $m \in \mathbb{N}$. Stellen Sie die folgenden rationalen Zahlen als Kettenbrüche $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ mit $a_0 \in \mathbb{N}_0$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ dar.

$$\text{a)} \quad \frac{m+1}{m} \qquad \text{b)} \quad \frac{m+2}{m} \qquad \text{c)} \quad \frac{m+3}{m} \qquad \text{d)} \quad \frac{m+4}{m}$$

Tipp: Führen Sie dazu geeignete Fallunterscheidungen durch.

Aufgabe 7 (Fibonacci-Zahlen und Kettenbruchdarstellungen)
Das n-te Glied der durch $F_1 := F_2 := 1$ und $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 3$ rekursiv definierten Folge heißt *n-te Fibonacci-Zahl*. Schreiben Sie $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ als Kettenbruch.

Aufgabe 8 (Wurzeln als periodische Kettenbrüche)
Finden Sie für folgende reellen Zahlen Darstellungen als periodische Kettenbrüche. Beweisen Sie anschließend, dass die von Ihnen gefundenen Darstellungen die gewünschten reellen Zahlen repräsentieren.

$$\text{a)} \quad \sqrt{2} \qquad \text{b)} \quad \sqrt{3} \qquad \text{c)} \quad \sqrt{5} \qquad \text{d)} \quad \sqrt{7}$$

Aufgabe 9 (Lucas-Zahlen)
Für $n \in \mathbb{N}$ ist die n-te *Lucas-Zahl* gegeben durch

$$L_n := \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

a) Berechnen Sie L_n für $1 \leq n \leq 5$. Finden und beweisen Sie eine rekursive Formel für L_n.

b) Folgern Sie, dass die Lucas-Zahlen eine Folge ganzer Zahlen bilden.

c) Zeigen Sie, dass zwei aufeinander folgende Lucas-Zahlen teilerfremd sind.

Aufgabe 10 (Transzendenz von Potenzen und Irrationalität von Logarithmen)
Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \neq b$. Sei $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Sei $t \in \mathbb{R}$ transzendent.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Seien a und b teilerfremd. Es ist $\log_b(a)$ irrational.

b) Es ist t^n transzendent.

c) Es ist $\log_{\mathrm{e}}\left(\frac{a}{b}\right)$ irrational. Dabei bezeichnet e die eulersche Zahl.

Tipp: Sie dürfen verwenden, dass die algebraischen Zahlen einen Körper bilden.

Aufgabe 11 (Natürlicher Logarithmus, Exponentialfunktion und eulersche Zahl)
Für $x \in (0, \infty)$ sei

$$\mathrm{L}(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es ist $\mathrm{L} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ bijektiv. Es bezeichne $\mathrm{L}^{-1} : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ die Umkehrfunktion L.

b) Für $x, y \in (0,\infty)$ gilt $\mathrm{L}(xy) = \mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(y)$.

c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{L}^{-1}(x+y) = \mathrm{L}^{-1}(x) \cdot \mathrm{L}^{-1}(y)$.

d) Für $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ gilt $\mathrm{L}^{-1}\left(\frac{p}{q}\right) = (\mathrm{L}^{-1}(1))^{\frac{p}{q}}$.

e) Sei $\mathrm{e} := \mathrm{L}^{-1}(1)$. Es gilt $\mathrm{L}^{-1}(x) = \mathrm{e}^x$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 12 (Nullstellen von Polynomen)
Beweisen Sie folgende Aussagen.

a) Seien $p \in \mathbb{C}[x]$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Ist $p(\alpha) = 0$, so ist $x - \alpha$ ein Teiler von p.

b) Sei $p \in \mathbb{C}[x]$ von Grad $m \in \mathbb{N}$. Dann hat p höchstens m verschiedene Nullstellen.

Aufgabe 13 (Darstellung der Kreiszahl Pi über eine Fourierreihe)
Für eine Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ ist die Fourierreihe in Sinus-Kosinus-Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$$

gegeben durch

$$a_k \quad = \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x \quad \text{für } k \geq 0 \quad \text{und} \quad b_k \quad = \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x \quad \text{für } k \geq 1.$$

a) Bestimmen Sie die Fourierreihe der Signumsfunktion $\mathrm{sign} : [-\pi, \pi] \to \{-1, 0, 1\}$.

b) Finden Sie durch Einsetzen eines geeigneten Wertes eine Reihendarstellung von π. Klären Sie die Konvergenz der Reihe für diesen Wert.

Aufgabe 14 (Exponentialfunktion über ihre Differentialgleichung)
Bezeichne $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $f' = f,\ f(0) = 1$.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{Exp}(x+y) = \mathrm{Exp}(x)\,\mathrm{Exp}(y)$.

b) Es ist $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ bijektiv.

c) Sei $\mathrm{e} := \mathrm{Exp}(1)$. Es gilt $\mathrm{Exp}(x) = \mathrm{e}^x$ für $x \in \mathbb{R}$.

Tipp: Verwenden Sie den Satz von Picard-Lindelöf.

Aufgabe 15 (Substitution zur Lösung von polynomialen Gleichungen)
Ein normiertes Polynom $p(x) = p_0 + \cdots + p_{n-1}x^{n-1} + x^n$ heißt *reduziert*, falls $p_{n-1} = 0$.

a) Bringen Sie ein allgemeines normiertes Polynom $p(x)$ durch eine geeignete lineare Substitution in reduzierte Form. Lösen Sie so die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

b) Wenden Sie die Substitution aus a) auf $x^3 + ax^2 + bx + c$ an.

Hinweis: Dies vervollständigt die Herleitung der Formeln von Cardano aus der Vorlesung.

c) Finden Sie Bedingungen an die Koeffizienten von $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ derart, dass bei Anwendung der Substitution aus a) auch das Monom von Grad 1 eliminiert wird.

Bestimmen Sie in diesem Fall die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$. Welches Lösungsverfahren aus dem Schulcurriculum haben Sie damit hergeleitet?

Aufgabe 16 (Formeln von Cardano)
Lösen Sie die Gleichung $x^3 + 24x - 54 = 0$.

Aufgabe 17 (Polynomiale Gleichungen)
Lösen Sie über $\mathbb{C}$ folgende Gleichungen.

a) $x^3 - 50x^2 + 769x - 3600 = 0$

b) $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$

Aufgabe 18 (Reelle Nullstellen von Polynomen dritten Grades)
Sei $f := x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) Das Polynom f hat 3 verschiedene reelle Nullstellen.

(2) Es ist $R := \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{3}\right)^3 < 0$.

Interpretieren Sie (2) bezüglich der bei der Berechnung der ersten reellen Nullstelle auftretenden Quadratwurzeln.

Hinweis: In (2) *sind p und q die Koeffizienten der Reduktion von f.* Cf. Aufgabe 15.

Aufgabe 19 (Algebraische Polynome und polynomiale Funktionen)

a) Zeigen Sie folgenden Satz.

> Sei $p \in \mathbb{C}[x]$. Dann ist $p = 0 \in \mathbb{C}[x]$ genau dann, wenn $p(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$.
> D.h. p ist das Nullpolynom genau dann, wenn p die Nullfunktion auf $\mathbb{C}$ induziert.

b) Folgern Sie aus a) den Satz vom Koeffizientenvergleich.

c) Bezeichne $\mathbb{F}_2$ den Körper mit 2 Elementen. Zeigen Sie, dass $x^2 + x$ auf $\mathbb{F}_2$ die Nullfunktion induziert. Gilt über $\mathbb{F}_2$ der Satz vom Koeffizientenvergleich?

d) Sei $f \in \mathbb{R}[x]$. Zeigen Sie, dass f genau dann ungeraden Grad hat, wenn die Zahl der reellen Nullstellen (mit Multiplizität) von f ungerade ist.

Aufgabe 20 (Irreduziblität mit und ohne Eisenstein, Erweiterung des Grundkörpers)
Beweisen Sie alle folgenden Aussagen und beantworten Sie alle Fragen.

a) Es ist $f := 5x^3 - 6x^2 + 3x + 12 \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel.

b) Für alle $n \geq 2$ und alle Primzahlen p ist das Polynom $x^n \pm p \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel. Insbesondere ist $g := x^4 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel.

c) Es erfüllt $h := x^2 + 4$ kein Eisensteinkriterium, aber $h \in \mathbb{Q}[x]$ ist irreduzibel.

d) Sind $f, g, h \in \mathbb{R}[x]$ irreduzibel? Was gilt für $f, g, h \in \mathbb{C}[x]$?

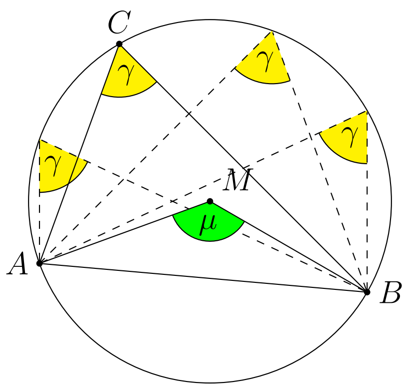
Hinweis: Es ist nicht erforderlich eventuelle Nullstellen von f explizit zu berechnen.

Aufgabe 21 (Winkelsumme im n-Eck)
Stellen Sie für $n \geq 3$ eine Formel für die Innenwinkelsumme im konvexen n-Eck auf und beweisen Sie diese.

Aufgabe 22 (Satz des Thales und Satz vom Umfangswinkel)
Beweisen Sie unter Verwendung der Winkelsumme im (gleichschenkligen) Dreieck

a) den *Satz des Thales*.

b) den *Satz vom Umfangswinkel*: Gegeben sind ein Kreis mit Mittelpunkt M und drei Punkte A, B, C auf dem Kreis so, dass C auf derselben Seite der Strecke AB liegt wie M. Dann ist der Mittelpunktswinkel $\mu = \angle AMB$ doppelt so groß wie der Umfangswinkel $\gamma = \angle ACB$.



Aufgabe 23 (Winkel im Sehnenviereck)
Ein Viereck $ABCD$ heißt *Sehnenviereck*, wenn die Punkte A, B, C, D auf einem gemeinsamen Kreis liegen, d.h. wenn das Viereck einen Umkreis hat. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es gibt Vierecke, die keine Sehnenvierecke sind.

b) Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn sich darin die gegenüberliegenden Winkel zu π addieren.

Aufgabe 24 (Spezielle Werte der Winkelfunktionen)
Leiten Sie jeweils die exakten Werte für $\sin x$ und $\cos x$ her.

a) Für $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right\}$. *Tipp: Verwenden Sie geeignete geometrische Figuren.*

b) Für $x \in \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{12}\right\}$. *Tipp: Verwenden Sie a) und die Additionstheoreme.*

c) Für $x = \frac{\pi}{5}$. *Tipp: Verwenden Sie das regelmäßige Fünfeck.*

Aufgabe 25 (Additionstheoreme via Differenziation)
Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Differenzieren Sie geeignete Hilfsfunktionen um folgende Aussagen zu beweisen.

a) Es gilt $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

b) Es gilt $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$.

Aufgabe 26 (Reihenentwicklungen der Winkelfunktionen, Eulersche Formel und algebraische Werte)

a) Stellen Sie für die Winkelfunktionen sin und cos die Taylorreihen im Entwicklungspunkt 0 auf und beweisen Sie, dass diese auf ganz $\mathbb{R}$ gegen sin bzw. cos konvergieren.

b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\exp(\mathrm{i}x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$.

c) Sei $r \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $\sin(r\pi)$ und $\cos(r\pi)$ algebraische Zahlen sind.

Tipp: In c) dürfen Sie verwenden, dass die algebraischen Zahlen einen Körper bilden.

Aufgabe 27 (Zusammenhang von Glattheit und Analytizität: Beispiel von Cauchy)
Gegeben Sei die Funktion

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \phi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass ϕ unendlich oft differenzierbar ist mit $\phi^{(n)}(0) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Was bedeutet das für die Taylorreihe von ϕ im Entwicklungspunkt 0? Ist ϕ analytisch?

Aufgabe 28 (Tangens und Arcustangens)
Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ ist die *Tangensfunktion* definiert durch $\tan(x) := \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

a) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Tangensfunktion und skizzieren Sie $\tan(x)$ auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Bestimmen Sie alle Bereiche auf denen die Tangensfunktion streng monoton steigend ist und skizzieren Sie jeweils die Umkehrfunktion *Arcustangens* arctan.

c) Bestimmen Sie die erste Ableitung des Arcustangens.

d) Verwenden Sie den Arcustangens um $\dfrac{\pm 1 \pm \mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ in Polarform umzuwandeln.

Aufgabe 29 (Areafunktionen durch Lösen algebraischer Gleichungen)
Für $x \in \mathbb{R}$ sind die Hyperbelfunktionen definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Betrachten Sie die Funktionswerte als Variable y und lösen Sie die Gleichungen nach x auf. Auf diese Weise erhalten Sie Ausdrücke für die Areafunktionen Arsinh und Arcosh. Wie viele Äste treten jeweils auf? Woran kann man das in Ihrer Rechnung erkennen?

Aufgabe 30 (Additionstheoreme für Tangens und Arcustangens)

a) Verwenden Sie die Additionstheoreme für sin und cos um ein solches für tan aufzustellen.

b) Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus a) um ein Additionstheorem für arctan aufzustellen. Klären Sie dessen Geltungsbereich.

Aufgabe 31 (Existenz der Fläche unter der Hyperbel)
Die Hyperbel in Normalform ist gegeben durch die Gleichung $x^2 - y^2 = 1$.

a) Transformieren Sie diese Gleichung durch eine Drehung um $\frac{\pi}{4}$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe von a) die für die Definition von sinh und cosh verwendete Fläche durch Integration.

Tipp zu a): Machen Sie sich eine Skizze und verwenden Sie eine geeignete Drehmatrix.

Aufgabe 32 (Reihenentwicklung des Arcustangens)

a) Stellen Sie über die Taylorreihe von $\arctan'$ die Taylorreihe von arctan im Entwicklungspunkt 0 auf. Bestimmen Sie deren Konvergenzbereich.

b) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \operatorname{sign}(x)\frac{\pi}{2}$.

c) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$. Zeigen Sie, dass $\arctan x = \operatorname{sign}(x)\dfrac{\pi}{2} - \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)x^{2k+1}}$.

d) Zeigen Sie, dass die Reihe aus *c*) auf $(1, \infty)$ lokal gleichmäßig konvergiert, d.h. dass zu jedem $x \in (1, \infty)$ eine Umgebung existiert auf der die Reihe gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 33 (Integration durch geschickte Substitution)
Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 - 12x + 8}}\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 - 12x + 10}}\mathrm{d}x$

Aufgabe 34 (Integration durch noch geschicktere Substitution: Weierstraß-Substitution)
Die sogenannte *Weierstraß* -Substitution ist gegeben durch $\tan \frac{x}{2} = t$.

a) Stellen Sie $\sin x$ und $\cos x$ als rationale Funktionen von t dar.

b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$.

c) Zeigen Sie, dass das unbestimme Integral $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ für jede rationale Funktion R analytisch bestimmt werden kann.

Aufgabe 35 (Basis einer einfachen algebraischen Körpererweiterung)
Seien $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L \subseteq \mathbb{C}$ Körper. Gibt es $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$, so heißt L *einfach* über K.

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ über K algebraisch mit Minimalpolynomn $\mu_{\alpha,K}$ von Grad $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass $A := \{\alpha^j : 0 \leq j \leq n-1\}$ über K linear unabhängig ist.

b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{span}_K(A)$ einen Körper bildet.

c) Folgern Sie den Körpergrad $(K(\alpha) : K)$.

Aufgabe 36 (Auf der Suche nach Zwischenkörpern)
Seien $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L \subseteq \mathbb{C}$ Körper. Sei $\alpha \in Ł$ über K algebraisch mit Minimalpolynom $\mu_{\alpha,K}$.

a) Es sei $(L : K) = n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\deg \alpha := \deg \mu_{\alpha,K}$ ein Teiler von n.

b) Finden sie für jeden positiven Teiler k von m einen Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq M \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[m]{2})$ von Grad $(M : \mathbb{Q}) = k$

Aufgabe 37 (Charakterisierung endlicher Körpererweiterungen)
Sei L ein Erweiterungskörper von K. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Es ist $(L : K) < \infty$.

(2) Es existieren über K algebraische Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in Ł$ so, dass mit $K_0 := K$ und $K_i := K_{i-1}(\alpha_i)$ für $i \geq 1$ gilt, dass $L = K_n$.

Aufgabe 38 (Elementare Konstruktionen)

a) Verwenden Sie den Höhensatz um die Wurzel einer Zahl zu konstruieren.

b) Gegeben seien Strecken der Längen a und b. Zeigen Sie, dass Strecken der Längen $a+b$, $|a-b|$, $a \cdot b$ und, für $b \neq 0$, $\dfrac{a}{b}$ konstruierbar sind. *Hinweis: Strahlensatz.*

Aufgabe 39 (Dreiteilung des Winkels nach Archimedes)
Gegeben sei der spitze Winkel $\alpha = \angle BAX$. Wir führen folgende Konstruktionsschritte durch.

1) Verlängeren Sie die Strecke XA zur Halbgeraden g mit Endpunkt X. Zeichnen Sie in A einen Kreis mit Radius $r = \overline{AB}$.

2) Markieren Sie auf dem Lineal eine Strecke der Länge r. Bezeichnen Sie deren Endpunkte mit C und D.

3) Legen Sie das Lineal so auf g, dass C außerhalb des Kreises und gegenüber von X, und D auf dem Kreis liegt. Verschieben Sie C auf g in Richtung Kreis so, dass D auf dem Kreis in Richtung B wandert, bis B auf der Verlängerung der Strecke CD liegt. Zeichnen Sie nun die Strecke CB ein.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben.

a) Fertigen Sie eine Zeichung an, die die obige Konstruktion veranschaulicht.

b) Zeigen Sie, dass $\angle BCA = \frac{\alpha}{3}$ bzw. .

c) Erklären Sie, warum dieses Konstruktionsverfahren nicht im Widerspruch dazu steht, dass die Dreiteilung des Winkels mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist.

d) Überlegen Sie sich, wie man das Konstruktionsverfahren auf beliebige Winkel ausdehnt.

Aufgabe 40 (Konstruktion ganzzahliger Winkel)
Zeigen Sie, dass ein ganzzahliger Winkel α zwischen $0°$ und $360°$ genau dann konstruierbar ist, wenn $\alpha = k \cdot 3°$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$, d.h. wenn α durch 3 teilbar ist.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $3°$ konstruierbar ist. Für die andere Implikation ist ein Widerspruchsbeweis empfehlenswert.

Hinweis: Diese Aufgabe setzt die Vorlesung vom 28.06.18 voraus.

Aufgabe 41 (Faltkonstruktion zur Winkeltrisektion)
Gegeben sei ein rechtwinkliges Blatt Papier mit Eckpunkten A, B, C und D. Auf der Kante AD sei der Punkt P gegeben. Wir führen folgende Faltkonstruktion durch.

1) Falten Sie die Strecke BP. Falten Sie eine beliebige Parallele EF zu BC, wobei E auf der Kante AB liegen soll. Falten Sie anschließend die Mittelparallele GH von EF und BC.

2) Falten Sie die Ecke B so ab, dass E auf BP und gleichzeitig B auf GH liegt. Bezeichnen Sie die jeweiligen Bildpunkte mit E' und B'.

3) Falten Sie das Blatt auf. Bezeichne I den Schnittpunkt der letzten Faltkante mit GH.

Zeigen Sie, dass der Winkel $\alpha = \angle CBP$ durch die Linien BB' und BI gedrittelt wird. Erklären Sie warum diese Faltkonstruktion keine Trisektion des Winkels mit Zirkel und Lineal darstellt.

Hinweis: Es empfiehlt sich EF ungefähr in der Mitte des Blatts zu wählen.

Aufgabe 42 (Faltkonstruktion von $\sqrt[3]{2}$)
Gegeben sei ein quadratisches Blatt Papier mit Eckpunkten A, B, C und D. Teilen Sie das Blatt durch das Falten von zwei Parallelen zu AB in drei gleiche parallele Teile. Die damit ausgezeichneten Punkte auf dem Rand des Quadrats, begonnen mit der linken unteren Ecke A gegen den Uhrzeigersinn, heißen A, B, E, G, C, D, H und F. Falten Sie die Ecke B so ab, dass

B auf AD und gleichzeitig E auf GH zu liegen kommt. Bezeichnen Sie die Bildpunkte mit B' bzw. E'.

Zeigen Sie, dass $\dfrac{\overline{B'D}}{\overline{AB'}} = \sqrt[3]{2}$.

Aufgabe 43 (Glaserkonstruktion des regelmäßigen Siebenecks)
In einem Fachbuch für Glaser wird folgende Näherungskonstruktion für das regelmäßige Siebeneck vorgeschlagen.

1) Zeichnen Sie einen Kreis mit Mittelpunkt O. Wählen Sie einen Punkt A auf dem Kreis und zeichnen Sie den Durchmesser durch A. Zeichnen Sie anschließend den zu OA orthogonalen Durchmesser.

2) Zeichnen Sie um A einen Kreis mit Radius $r := \overline{OA}$. Dieser schneidet den Kreis um O in den Punkten B und C.

3) Zeichnen Sie die Strecke BC. Diese schneidet OA im Punkt D. Tragen Sie die Länge $t := \overline{BD}$ beginnend in A sieben Mal auf dem Kreis ab.

Führen Sie diese Konstruktion durch und untersuchen Sie ihre Güte, d.h. bestimmen Sie $\dfrac{|s-t|}{r}$, wobei s die exakte Seitenlänge des regelmäßigigen Siebenecks mit Umkreisradius r bezeichnet.

Aufgabe 44 (Symmetriegruppe eines regelmäßigen Dreiecks)
Betrachten Sie ein regelmäßiges Dreieck mit Eckpunkten A, B und C. Eine *Symmetrie* des Dreiecks ABC ist eine Bewegung der euklidischen Ebene, die ABC auf ABC abbildet.

Im Folgenden wollen wir die Symmetriegruppe $\mathrm{Sym}(ABC)$ des Dreiecks ABC beschreiben.

a) Finden Sie alle Spiegeleachsen des Dreiecks ABC.

b) Für einen Punkt P und einen Winkel $\phi \in [0, 2\pi)$ bezeichne (P, ϕ) die Drehung mit Fixpunkt P umd den Winkel ϕ. Finden Sie alle Drehungen (P, ϕ) mit $(P, \phi) \in \mathrm{Sym}(ABC)$.

c) Überlegen Sie sich, dass Sie mit a) und b) alle Elemente von $\mathrm{Sym}(ABC)$ gefunden haben.

d) Stellen Sie die Verknüpfungstabelle von $\mathrm{Sym}(ABC)$ auf.

Algebraische Zusatzfrage: Zu welcher (abstrakten) Gruppe ist $\mathrm{Sym}(ABC)$ *isomorph?*

Aufgabe 45 (Untergruppen von Index 2 und Normalteiler)
Sei H ein Untergruppe der Gruppe $(G, \cdot)$. Bezeichne $|G : H|$ den Index von H in G.

a) Sei $|G : H| = 2$. Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler von G ist.

b) Finden Sie eine nicht-abelsche endliche Gruppe G mit Normalteiler H so, dass $|G : H| \geq 3$.

Aufgabe 46 (Symmetriegruppe des regelmäßigen n-Ecks)
Ziel dieser Aufgabe ist es $D(n)$, die Symmetriegruppe des regelmäßigen n-Ecks, zu beschreiben.

a) Finden Sie alle Drehungen d der euklidischen Ebene mit $d \in D(n)$. Bezeichne $R(n)$ die Menge alle Drehungen $d \in D(n)$. Zeigen Sie, dass $R(n)$ eine Gruppe bildet. Zu welcher (abstrakten) Gruppe ist $R(n)$ isomorph?

b) Finden Sie alle Spiegelachsen des regelmäßigen n-Ecks.

c) Überlegen Sie sich, wie durch Komposition einer gewissen Drehung $x \in R(n)$ und einer beliebigen Spiegelung s des n-Ecks alle $d \in D(n)$ beschrieben werden können.

d) Finden Sie $|D(n) : R(n)|$, $|D(n)|$ und zeigen Sie, dass $R(n)$ ein Normalteiler von $D(n)$ ist.

Aufgabe 47 (Symmetriegruppe des Tetraeders)
Ziel dieser Aufgabe ist es T, die Symmetriegruppe des Tetraeders, zu beschreiben.

a) Finden Sie alle Spiegelebenen des Tetraeders. Skizzieren Sie einige dieser Ebenen.

b) Finden Sie alle Drehachsen und Drehwinkel des Tetraeders. Skizzieren Sie exemplarisch.

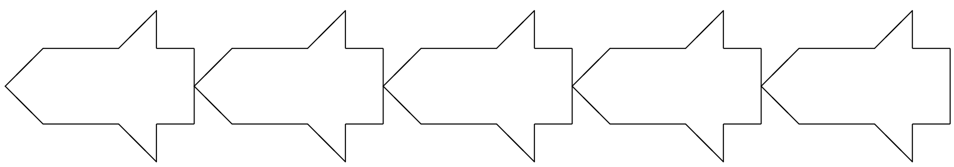
c) Überlegen Sie sich, wie man durch Komposition von möglichst wenigen verschiedenen Drehungen und Spiegelungen alle Symmetrien des Tetraeders erzeugen kann.

d) Finden Sie $|T|$. Zeigen Sie, dass die Drehungen einen Normalteiler von Index 2 bilden.

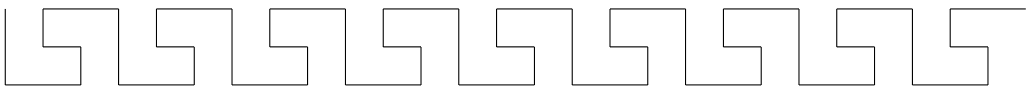
Algebraische Zusatzfrage: Zu welcher (abstrakten) Gruppe ist T isomorph?

Aufgabe 48 (Friese und Friesgruppen)
Zeichnen Sie alle vorkommenden Spiegelachsen und Drehzentren sowie die kürzeste Verschiebung in die abgebildeten Muster ein. Untersuchen Sie, ob es sich um ein Fries handelt, ob es Gleitspiegelungen enthält und bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörige Friesgruppe.

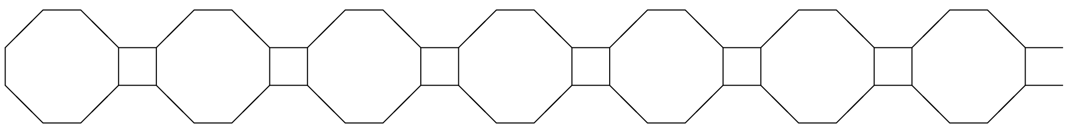
1.



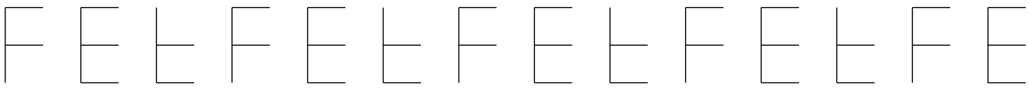
2.



3.

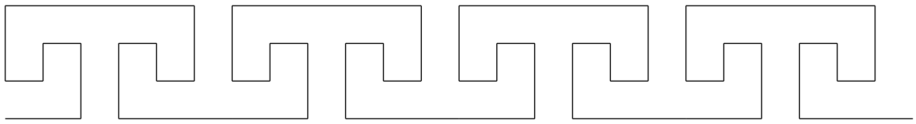


4.

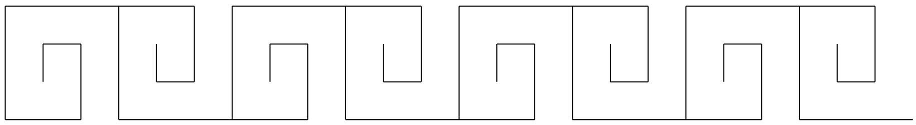


5.

6.



7.



8.