1.Übungsblatt zur Algebra

Anne Henke, Sam Thelin, WS 2018

1. (Zur Diskussion.) Im folgenden haben alle Matrizen Einträge in den reellen Zahlen. Welche der folgenden Mengen sind Gruppen, welche davon sind abelsch:

   (a) die Menge $\mathbb{N}_0$ mit der Verknüpfung $m * n = \max\{m, n\}$?

   (b) die Menge $\mathbb{Z}$ mit der Verknüpfung $m * n = m + n + 1$?

   (c) die Menge M aller 2×2-Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ mit $ac \neq b^2$ mit Matrixmultiplikation?

   (d) die Menge $B_2(\mathbb{R})$ aller 2×2-Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ mit $ac \neq 0$ mit Matrixmultiplikation?

   (e) die Menge $\{1, 3, 5\}$ mit Multiplikation modulo 14?

   (f) die Menge $\{1, 7, 13\}$ mit Multiplikation modulo 14?

2. (Zum Votieren.) Seien G_1 und G_2 Gruppen. Auf dem kartesischen Produkt $G := G_1 \times G_2$ definieren wir eine Verknüpfung $*$ durch

$$(g_1, g_2) * (h_1, h_2) := (g_1 h_1, g_2 h_2)$$

   mit $g_i, h_i \in G_i$ für $i = 1, 2$. (Hierbei wird natürlich jeweils das Produkt $g_i h_i$ mit der Verknüpfung in G_i gebildet.) Zeigen Sie, dass G mit dieser Verknüpfung eine Gruppe ist. Zeigen Sie, dass G genau dann abelsch ist, wenn alle G_i abelsch sind. Wieviele Elemente hat die Gruppe G? Bestimmen Sie die Gruppentafel der additiven Gruppe $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, und schreiben Sie diese auch als multiplikative Tafel mit $H = \{1, a, b, c\}$.

3. (Zum Votieren.)

   (a) Bestimmen Sie die Multiplikationstafel der symmetrischen Gruppe S_3.

   (b) Seien a, b, n, r natürliche Zahlen mit $1 \leq a, b, r \leq n$. Berechnen Sie die folgenden Produkte in S_n:

      i. $(1\,a)(1\,b)(1\,a)$, wobei $a \neq b \neq 1$;

      ii. $(a_1\,a_r) \cdots (a_1\,a_3)(a_1\,a_2)$, wobei $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$;

      iii. $(1\,2 \ldots n)^{k-1}(1\,2)(1\,2 \ldots n)^{1-k}$ für $2 \leq k < n$.

   (c) Seien n, r natürliche Zahlen mit $1 \leq r \leq n$. Seien $\{a_1, \ldots, a_r\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ eine Teilmenge von r paarweise verschiedenen Zahlen. Sei $\pi \in S_n$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\pi(a_1\ \ldots\ a_r)\pi^{-1} = (\pi(a_1)\ \ldots\ \pi(a_r)).$$

4. (Schriftlich, 9 Punkte.) Sei G eine multiplikative Gruppe.

   (a) Seien $a, x, y \in G$. Beweisen Sie mit Hilfe der Gruppenaxiome:

      i. $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$;

      ii. Falls $ax = ay$ ist, dann gilt $x = y$;

      Gilt $xa = ay$ impliziert $x = y$? Begründen Sie Ihre Antwort.

   (b) i. Es gelte $g^2 = 1$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

      ii. Sei $|G|$ gerade. Zeigen Sie, dass es ein Element $1 \neq g \in G$ gibt mit $g^2 = 1$.

5. (Zum Votieren) Sei $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ Körper mit zwei Elementen. Zeigen Sie, dass

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right\} \subseteq M_2(\mathbb{Z}_2)$$

   mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen ein Körper mit vier Elementen ist.

6. (Zum Votieren.)

   (a) Welche der folgenden Mengen sind Ringe? Welche sind kommutative Ringe?

      i. Die Menge $\mathbb{Z}$ mit Addition und Multiplikation definiert durch
      $$\begin{aligned} a \oplus b &= a + b + 1 \text{ und} \\ a \otimes b &= ab + a + b. \end{aligned}$$

      ii. Die Menge $S = \{a + b\pi : a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit gewöhnlicher Addition und Multiplikation von reellen Zahlen.

      iii. Die Menge $S = \{(a_{ij}) \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) : a_{3i} = 0 \text{ für alle } i\}$ mit gewöhnlicher Addition und Multiplikation von Matrizen.

      iv. Die Menge $R^X = \{f : X \to R : f \text{ Funktion}\}$ aller Funktionen von einer Menge X in einen Ring R mit punktweiser Addition und Multiplikation,
      $$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x) \text{ und} \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x), \end{aligned}$$
      für $f, g \in R^X$ und $x \in X$.

      v. Die Menge $S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \exists N(f) \in \mathbb{R} \text{ mit } |f(x)| \leq N(f) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$ aller beschränkten Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ bezüglich punktweiser Addition und Multiplikation.

      vi. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X mit Addition and Multiplikation definiert durch
      $$\begin{aligned} a + b &= (a \cup b) \setminus (a \cap b) \text{ und} \\ ab &= a \cap b. \end{aligned}$$

   (b) Ein Element $x \neq 0$ in einem Ring R heißt *Nullteiler*, falls es ein $0 \neq y \in R$ gibt mit $x \cdot y = 0$ oder $y \cdot x = 0$. Welche der Ringe aus (a) haben Nullteiler, welche haben keine Nullteiler?

7. (Zum Selbststudium.) Sei G eine multiplikative Gruppe. Sei $x \in G$ und $n, m \in \mathbb{Z}$. Wir definieren:
$$x^n = \begin{cases} \underbrace{xxx \cdots x}_{n \text{ mal}} & n > 0; \\ e & n = 0; \\ \underbrace{x^{-1}x^{-1} \cdots x^{-1}}_{-n \text{ mal}} & n < 0. \end{cases}$$
   Beweisen Sie mit Hilfe der Gruppenaxiome:

   (a) $(x^n)^{-1} = x^{-n}$;

   (b) $x^m x^n = x^{m+n}$;

   (c) $(x^m)^n = x^{mn}$.

Die Abgabe der schriftlichen Aufgaben des ersten Übungsblattes erfolgt in Ihrer ersten Übungsgruppe.