10.Übungsblatt zur Algebra

Anne Henke, Sam Thelin, WS 2018

1. (Zum Votieren.) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und seien $a, b \in R \setminus \{0\}$.

   (a) Zeigen Sie: Das kleinste gemeinsame Vielfache $\mathrm{kgV}(a,b)$ von a und b existiert genau dann, wenn das Ideal $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle$ ein Hauptideal ist.

   (b) Sei jetzt R ein faktorieller Ring. Erklären Sie, wie man aus Faktorisierungen von a und b in unzerlegbare Faktoren, $\mathrm{kgV}(a,b)$ bestimmen kann. Begründen Sie Ihre Antwort.

   (c) Zeigen Sie, dass $a = 2$ und $b = 2 + \sqrt{-10}$ kein kleinstes, gemeinsames Vielfaches in $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ haben (*Hinweis*: Welche Werte könnte die Norm eines solchen Vielfaches annehmen?).

2. (Zum Votieren.) Ist R ein euklidischer Ring mit Gradabbildung δ, dann kann man – analog wie für ganze Zahlen – den $\mathrm{ggT}(a,b)$ für $a \in R$ und $b \in R \setminus \{0\}$ mit dem Euklidischen Algorithmus bestimmen: Sei $r_0 = a$ und $r_1 = b$ und für $i \geq 1$ seien q_i und r_{i+1} definiert durch

$$r_{i-1} = q_i r_i + r_{i+1} \quad \text{mit} \quad \delta(r_{i+1}) < \delta(r_i) \quad \text{oder} \quad r_{i+1} = 0.$$

Dann gilt $\mathrm{ggT}(a,b) = r_n$ mit $n = \max\{i \geq 1 : r_i \neq 0\}$. Ausserdem gibt es $r, s \in R$ mit $\mathrm{ggT}(a,b) = ra + sb$:

$$\begin{aligned} r_n &= r_{n-2} - q_{n-1} r_{n-1} \\ &= r_{n-2} - q_{n-1}(r_{n-3} - q_{n-2} r_{n-2}) \\ &= \dots \\ &= r \cdot r_0 + s \cdot r_1. \end{aligned}$$

   (a) Beweisen Sie, dass $\mathrm{ggT}(a,b) = r_n$ ist.

   (b) Bestimmen Sie in den folgenden Fällen sowohl $\mathrm{ggT}(a,b)$ als auch $r, s \in R$, sodass $\mathrm{ggT}(a,b) = ra + sb$ ist:

      i. $R = \mathbb{Q}[X]$, $a = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$, $b = X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2$;

      ii. $R = \mathbb{Z}_5[X]$, $a = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$, $b = X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2$.

      iii. $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, $a = -3 - 10\sqrt{-2}$, $b = 5 + 2\sqrt{-2}$;

      iv. $R = \mathbb{Z}[\omega]$ mit $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $a = -2 + \omega$, $b = 1 + 2\omega$.
      (*Hinweis*: Um die q_i zu finden, vgl. Aufgabe 4(b) auf Blatt 9.)

3. (Schriftlich, 10 Punkte.) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. In dieser Aufgabe nehmen wir den folgenden Satz als Voraussetzung: Jeder kommutative Ring mit Eins hat ein maximales Ideal.

   (a) Sei $I \lhd R$ ein echtes Ideal von R. Zeigen Sie, dass R ein maximales Ideal M mit $I \subseteq M$ hat (*Hinweis*: Wenden Sie die Idealkorrespondenz an).

   (b) Sie $x \in R$ ein Element, das keine Einheit ist. Ziegen Sie, dass R ein maximales Ideal M mit $x \in M$ hat. Gilt dies auch für $x \in R^\times$?

   (c) Sei $J(R) := \bigcap_{I \lhd R,\, I \text{ maximal}} I$, der Schnitt aller maximalen Ideale von R (Jacobson-Radikal genannt). Zeigen Sie: Es gilt genau dann $J(R) = \{0\}$, wenn für jedes $x \in R \setminus \{0\}$ ein $y \in R$ existiert so, dass $xy + 1$ keine Einheit ist (*Hinweis*: Ist M ein maximales Ideal, so ist R/M ein Körper).

4. (Schriftlich, 11 Punkte.)

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i]$ unendlich viele Primelemente hat. (*Hinweis:* Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen $p \in \mathbb{Z}$ gibt, die auch in $\mathbb{Z}[i]$ Primelemente sind.)

   (b) Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(x, y)$ und $\mathrm{kgV}(x, y)$ für alle Paare (x, y) der folgenden Elemente in $\mathbb{Z}[i]$:

   $$33, \quad 30 + 12i, \quad 187 + 187i, \quad -117 + 162i.$$

   Begründen Sie Ihre Antwort.

5. (Zum Votieren.) Die folgenden Abbildungen sind Einsetzungshomomorphismen, also insbesondere Ringhomomorphismen. Bestimmen Sie jeweils das Bild dieser Ringhomomorphismen, und ob der Kern ein Primideal oder ein maximales Ideal ist:

   (a) $\phi_1 \colon \mathbb{R}[X, Y] \to \mathbb{R},\ p(X, Y) \mapsto p(0, 0)$;

   (b) $\phi_2 \colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C},\ p(X) \mapsto p(2 + i)$;

   (c) $\phi_3 \colon \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{R},\ p(X) \mapsto p(1 + \sqrt{2})$;

   (d) $\phi_4 \colon \mathbb{C}[X, Y] \to \mathbb{C}[t],\ p(X, Y) \mapsto p(t^2, t^3)$.

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

6. (Zum Selbststudium.)

   (a) Sei R ein faktorieller Ring. Zeigen Sie, dass jedes unzerlegbare Element in R prim ist.

   (b) Sei R_1 ein faktorieller Ring, in dem das Folgende gilt: Für jedes $x \in R_1 \setminus \{0\}$ existiert $y \in R_1$ so, dass $xy+1$ keine Einheit ist. Zeigen Sie, dass R unendlich viele nicht paarweise assoziierte Primelemente hat. (*Hinweis*: Passen Sie Euklids klassischen Beweis an).

   (c) Sei R_2 ein unendlicher, faktorieller Ring mit endlich vielen Einheiten. Zeigen Sie, dass R_2 unendlich viele nicht paarweise assoziierte Primelemente hat. (*Hinweis*: Verwenden Sie Teil (b)).

   (d) Sei R_3 ein unendlicher, faktorieller Ring der kein Körper ist. Zeigen Sie, dass R_3 unendlich viele Primelemente hat, wobei hier paarweise assoziierte aber verschiedene Primelemente auch als verschieden betrachtet werden.