11.Übungsblatt zur Algebra
Anne Henke, Sam Thelin, WS 2018

1. (Zum Votieren.) Der Fundamentalsatz der Algebra sagt, dass jedes nicht konstante Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat. Folgern Sie, dass die unzerlegbaren Elemente in $\mathbb{R}[X]$ die Folgenden sind:

   (a) Lineare Polynome mit Koefficienten in $\mathbb{R}$;

   (b) Quadratische Polynome in $\mathbb{R}[X]$ mit negativer Diskriminante (die Diskriminante des Polynoms $p = aX^2 + bX + c$ ist $D = b^2 - 4ac$).

   Begründen Sie Ihre Antwort.

2. (Schriftlich, 10 Punkte.) Welche der folgenden Ideale sind prim, welche sind maximal?
   (i) $\langle X^2 + 1\rangle \triangleleft \mathbb{R}[X]$; (ii) $\langle X^2 + 1\rangle \triangleleft \mathbb{C}[X]$; (iii) $\langle X\rangle \triangleleft \mathbb{Z}[X]$;
   (iv) $\langle X, Y\rangle \triangleleft \mathbb{R}[X, Y]$; (v) $\langle XY\rangle \triangleleft \mathbb{R}[X, Y]$; (vi) $\langle\sqrt{2}\rangle \triangleleft \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

3. (Zum Votieren.)

   (a) Sei R ein Integritätsbereich.

      i. Zeigen Sie, dass das Ideal $\langle X, Y\rangle$ in $R[X, Y]$ kein Hauptideal ist. (*Hinweis*: Es gilt $R[X, Y] = (R[X])[Y] = (R[Y])[X]$. Verwenden Sie die Gradformel.)

      ii. Sei $n \geq 2$. Folgern Sie, dass $R[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ kein Hauptidealring ist.

   (b) Faktorisieren Sie die folgenden Polynome in unzerlegbare Faktoren in $\mathbb{R}[X, Y]$:

   $$p = XY + X + Y + 1, \quad q = X^2Y - X, \quad r = X^2Y^2 - X^2 + Y^2 - 1.$$

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

4. (Zum Votieren.) Sie p eine Primzahl und sei K ein Körper mit Charakteristik $\mathrm{char}(K) = p$. Sei ferner $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ eine positive, ganze Zahl und $\varphi_{p^n} : K \to K$ die Abbildung, die durch $\varphi_{p^n} : x \mapsto x^{p^n}$ definiert ist.

   (a) Zeigen Sie, dass φ_{p^n} ein Homomorphimus ist. Zeigen Sie auch, dass φ_{p^n} injektiv ist. Wenn $n = 1$ heißt $\varphi_{p^n} = \varphi_p$ Frobeniushomomorphismus.

   (b) Sei $|K| < \infty$. Zeigen Sie, dass φ_{p^n} ein Automorphismus ist. Zeigen Sie auch: Es gilt $\varphi_{p^n} = \mathrm{id}_K$ wenn $|K| = p^n$ ist.

   Aus Teil (b) folgt insbesondere, dass es zu jedem $y \in K$ genau ein $x \in K$ existiert mit $x^p = y$, das heißt jedes Element in K hat eine eindeutige p-te Wurzel.

   (c) Der Ring $K = \mathbb{Z}_3[X]/\langle X^2 + 1\rangle$ ist ein Körper mit 9 Elementen und $\mathrm{char}(K) = 3$ (dies müssen Sie nicht zeigen). Finden Sie die dritte Wurzel von den folgenden Elementen in K:

   $$\overline{-1}, \qquad \overline{X}, \qquad \overline{X - 1}.$$

   Begründen Sie Ihre Antwort.

5. (Schriftlich, 9 Punkte.)

   (a) Faktorisieren Sie das Polynom $p = 3X^4 - 3X^3 + 3X^2 + 27X - 30$ in unzerlegbare Polynome in den folgenden Ringen:

   $$\mathbb{Z}[X], \quad \mathbb{R}[X], \quad \mathbb{C}[X], \quad \mathbb{Z}_2[X].$$

   (b) Faktorisieren Sie das Polynom $q = 2X^5 - 6X^4 - 8X + 24$ in unzerlegbare Polynome in den folgenden Ringen:

   $$\mathbb{Q}[X], \quad \mathbb{R}[X], \quad \mathbb{C}[X], \quad \mathbb{Z}_3[X], \quad \mathbb{Z}_7[X].$$

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

6. (Zum Selbststudium.) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie:

   (a) Ist $p \equiv 3 \mod 4$, so ist das Polynom $X^2 + 1$ unzerlegbar in $\mathbb{Z}_p[X]$.
   (*Hinweis:* Welche Ordnung hat eine potentielle Nullstelle in der Gruppe $\mathbb{Z}_p^\times$?)

   (b) Ist $p \equiv 2 \mod 3$, so ist das Polynom $X^2 + X + 1$ unzerlegbar in $\mathbb{Z}_p[X]$.
   (*Hinweis:* Es gilt $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$.)

   (c) Folgern Sie, dass es unendlich viele Primzahlen p derart gibt, dass X^2+X+1 unzerlegbar in $\mathbb{Z}_p[X]$ ist.