12.Übungsblatt zur Algebra

Anne Henke, Sam Thelin, WS 2018

1. (Schriftlich, 11 Punkte.)

   (a) Bestimmen Sie welche der folgenden Elemente in $\mathbb{Q}(5^{\frac{1}{3}})$, $\mathbb{Q}(i)$ beziehungsweise $\mathbb{Q}(5^{\frac{1}{3}}, i)$ enthalten sind:
   $$\frac{i}{3}, \qquad \frac{97}{5528}, \qquad \sqrt{5}, \qquad 5^{\frac{4}{3}} - i5^{\frac{1}{3}} + 25^{\frac{-2}{3}}.$$

   (b) Sei $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des unzerlegbaren Polynoms $f = X^3 + 3X - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Stellen Sie die folgenden Elemente von $\mathbb{Q}(a)$ als $\mathbb{Q}$-Linearkombination von $\{1, a, a^2\}$ dar:
   $$(1+a^2)(a-2a^2), \qquad a^{-1}, \qquad (1-a)^{-1}.$$

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

2. (Zum Votieren.)

   (a) Sei K ein Körper, sei $f \in K[X]$ ein Polynom mit $\deg(f) = n \geq 0$ und sei $I = \langle f \rangle$ das von f erzeugte Ideal. Warum ist der Quotient $V = K[X]/I$ ein K-Vektorraum? Zeigen Sie, dass $\{X^j + I \mid 0 \leq j < n\}$ eine Basis von V ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $g = X^4 + X^3 + 1$ über $\mathbb{Z}_2$ unzerlegbar ist. Sei $J = \langle g \rangle$ das von g erzeugte Ideal in $\mathbb{Z}_2[X]$. Geben Sie alle Elemente des Körpers $L := \mathbb{Z}_2[X]/J$ an. Sei $\alpha := X^2 + J$. Berechnen Sie α^j für $1 \leq j \leq 5$ und folgern Sie, dass die multiplikative Gruppe der Einheiten $L^\times$ von α erzeugt wird.

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

3. (Zum Votieren.)

   (a) Sei $\alpha = \sqrt{5} - \sqrt{7}$. Es ist $(\alpha + \sqrt{7})^2 = 5$. Zeigen Sie, dass $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5} - \sqrt{7})$ gilt. Folgern Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5} - \sqrt{7})$ ist. Ist auch $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5}/\sqrt{7})$?

   (b) Sei $a \in \{\sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{5} - \sqrt{7}, \sqrt{5}/\sqrt{7}\}$. Bestimmen Sie (in beliebiger Reihenfolge):
      - das Minimalpolynom $m_{a,\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}[x]$ von a über $\mathbb{Q}$,
      - eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}(a)$,
      - den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$.

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

4. (Schriftlich, 11 Punkte.)

   (a) Sei L/K eine Körpererweiterung und seien $a, b \in L$ algebraisch über K. Zeigen Sie:
      i. Es gilt $[K(a,b)\colon K] \leq [K(a)\colon K][K(b)\colon K]$.
         (*Hinweis*: Es gilt $[K(a,b)\colon K] = [K(a,b)\colon K(a)][K(a)\colon K]$.)
      ii. Sind $[K(a)\colon K]$ und $[K(b)\colon K]$ teilerfremd, so gilt $[K(a,b)\colon K] = [K(a)\colon K][K(b)\colon K]$.

   (b) Bestimmen Sie jeweils den Grad und eine Basis der folgenden Körpererweiterungen:
   $$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, 3^{\frac{1}{3}})/\mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{3}, 3^{\frac{1}{3}}, 3^{\frac{1}{4}})/\mathbb{Q}(3^{\frac{1}{3}}), \quad \mathbb{Q}(3^{\frac{1}{3}}, e^{2i\pi/3})/\mathbb{Q}.$$

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

5. (Zum Votieren.)

(a) Sei R ein faktorieller Ring, S ein Integritätsbereich und $\varphi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus mit Fortsetzung $\phi\colon R[X] \to S[X]$, wobei $\phi(X) = X$ ist. Sei $f = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in R[X]$ ein Polynom, das die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

(i) Es gilt $\mathrm{ggT}(a_0, \ldots, a_n) = 1$.

(ii) Es gilt $\deg f = \deg \phi(f)$.

(iii) $\phi(f)$ ist unzerlegbar in $S[X]$.

Zeigen Sie:

(A) Sei $f = gh$ mit $g, h \in R[X]$. Dann gilt:

$$\deg g + \deg h = \deg \phi(g) + \deg \phi(h).$$

Folgern Sie, dass $\deg g = \deg \phi(g)$ und $\deg h = \deg \phi(h)$ ist.

(B) Es gilt $\phi(g) \in S^\times$ oder $\phi(h) \in S^\times$. Folgern Sie, dass $g \in R$ oder $h \in R$ gilt.

(C) Es gilt $g \in R^\times$ oder $h \in R^\times$ (verwenden Sie Voraussetzung *(i)*), und f ist unzerlegbar in $R[X]$.

(b) Das Folgende gilt (und Sie müssen es nicht zeigen):

Lemma von Gauß. *Sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ unzerlegbar. Dann ist f auch unzerlegbar in $\mathbb{Q}[X]$.*

Beweisen Sie, mit Hilfe von Teil (a) und dem Lemma von Gauss, dass die folgenden Polynome unzerlegbar über $\mathbb{Q}$ sind:

(A) $p = X^3 + 4X^2 + 5$;

(B) $q = 8X^3 - 6X - 1$.

(*Hinweis:* Setzen Sie $R = \mathbb{Z}$ und $S = \mathbb{Z}_p$ für eine passende Primzahl p.)

6. (Zum Selbststudium.) Sei R ein faktorieller Ring.

(a) Sei $f = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in R[X]$. Wir definieren die formale Ableitung

$$D(f) := f' := \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} \in R[X].$$

Sei $a, b \in R$ und $g, h \in R[X]$. Zeigen Sie, dass $D(ag + bh) = aD(g) + bD(h)$ und $D(gh) = D(g)h + gD(h)$ sind.

(b) Sei $f \in R[X]$. Ein Element $a \in R$ heißt mehrfache Nullstelle von f wenn es ein $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und ein Polynom $g \in R[X]$ gibt mit

$$f(X) = (X - a)^m g(X).$$

Zeigen Sie, dass a genau dann eine mehrfache Nullstelle von $f \in R[X]$ ist, wenn a eine gemeinsame Nullstelle von f und f' ist.