13.Übungsblatt zur Algebra

Anne Henke, Sam Thelin, WS 2018

1. (Zum Votieren.)
   (a) Welche der folgenden Körpererweiterungen sind endlich, welche sind algebraisch:
      i. $\mathbb{Q}(\{3^{\frac{1}{n}} : 1 \leq n \leq 7\})/\mathbb{Q}$;
      ii. $\mathbb{Q}(\{3^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\})/\mathbb{Q}$
      (*Hinweis:* Zeigen Sie, dass $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{Q}(\{3^{\frac{1}{n}} : 1 \leq n \leq k\})$ ein Körper ist.);
      iii. $\mathbb{R}/\mathbb{Q}(\{3^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\})$?

      Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.
   (b) Angenommen L/K ist eine algebraische Körpererweiterung. Sei R ein Ring mit $K \subseteq R \subseteq L$. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

2. (Schriftlich, 11 Punkte.) Bestimmen Sie einen Zerfällungskörper L über $\mathbb{Q}$ sowie $[L : \mathbb{Q}]$ für die folgenden Polynome:

$$p = X^3 - 1, \quad q = X^3 - 2, \quad r = X^6 - 3X^3 + 2, \quad s = X^4 - 2X^2 - 35.$$

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

3. (Zum Votieren.) Sei $f = X^3 - 3X - 1$.
   (a) Zeigen Sie: f ist unzerlegbar über $\mathbb{Q}$. (*Hinweis*: Vgl. z.B. Aufgabe 5(b) auf Blatt 12.)
   (b) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass $2 - \alpha^2$ eine Nullstelle von f ist.
   (c) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Begründen Sie Ihre Antwort.

4. (Schriftlich, 11 Punkte.) Sei p eine Primzahl und sei n eine natürliche Zahl. Sei $\mathbb{F}_{p^n}$ der Körper mit p^n Elementen.
   (a) Sei $K \leq \mathbb{F}_{p^n}$ ein Teilkörper von $\mathbb{F}_{p^n}$. Zeigen Sie, dass $|K| = p^d$ ist mit $d \mid n$.

   Sei jetzt d eine natürliche Zahl mit $d \mid n$.

   (b) Zeigen Sie, dass $p^d - 1 \mid p^n - 1$ in $\mathbb{Z}$ gilt, und dass $X^{p^d-1} - 1 \mid X^{p^n-1} - 1$ in $\mathbb{Z}_p[X]$ gilt. Folgern Sie, durch Betrachtung des Polynoms $X^{p^d} - X \in \mathbb{Z}_p[X]$, dass $\mathbb{F}_{p^n}$ einen Teilkörper der Ordnung p^d hat.
   (c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_{p^n}$ genau einen Teilkörper der Ordnung p^d hat.
   (d) Skizzieren Sie den Teilkörperverband von $\mathbb{F}_{p^{12}}$.

5. (Zum Votieren.) Sei $\zeta_8 = e^{i\pi/4}$.
   (a) Zeigen Sie, dass $\zeta_8^2 = i$ und $\zeta_8 + \zeta_8^{-1} = \sqrt{2}$ ist.
   (b) Sei $p = X^4 + 1$.
      i. Zeigen Sie, dass $K = \mathbb{Q}(\zeta_8)$ ein Zerfällungskörper für p über $\mathbb{Q}$ ist. Zeigen Sie auch, dass $\mathbb{Q}(\zeta_8) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ ist und bestimmen Sie $[K : \mathbb{Q}]$.
      ii. Sei $\sigma \in \mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$. Zeigen Sie, dass $\sigma(\sqrt{2}) \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ und $\sigma(i) \in \{i, -i\}$ ist. Folgern Sie, dass $|\mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})| \leq 4$ ist.
      iii. Zeigen Sie, dass es $\sigma, \tau \in \mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$ gibt mit

$$\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \quad \sigma(i) = i \qquad \text{und} \qquad \tau(\sqrt{2}) = \sqrt{2}, \quad \tau(i) = -i.$$

      Folgern Sie, dass $|\mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})| = 4$ ist, und bestimmen Sie den Isomorphietyp der Gruppe $\mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$.
   (c) Sei $q = (X^4+1)(X^4-2)$. Zeigen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(\zeta_8, \sqrt[4]{2})$ ein Zerfällungskörper für q über $\mathbb{Q}$ ist. Bestimmen Sie $[L \colon \mathbb{Q}]$ mit Hilfe von Teil (a), und zeigen Sie, dass $|\mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q})| \leq 8$ ist.

6. (Zum Selbststudium.)

   (a) Sei $f = X^4 + 3X + 4$.

      i. Zeigen Sie: Ist $a \in \mathbb{Z}$ mit $f(a) = 0$, dann gilt $a \mid 4$. Folgern Sie, dass f keine Nullstelle in $\mathbb{Z}$ hat.

      ii. Zeigen Sie, dass die Gleichung $f = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ keine Lösung hat. Folgern Sie, dass f unzerlegbar über $\mathbb{Z}$ und auch über $\mathbb{Q}$ ist.

      iii. Zeigen Sie, dass f über $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ unzerlegbar ist. (*Hinweis:* Betrachten Sie den Grad $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})(\alpha) \colon \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})]$, wobei α eine Nullstelle von f in $\mathbb{C}$ ist.)

   (b) Seien $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ unzerlegbare Polynome und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $f(\alpha) = 0 = g(\beta)$. Zeigen Sie: f ist genau dann unzerlegbar über $\mathbb{Q}(\beta)$, wenn g unzerlegbar über $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist. (*Hinweis:* Betrachten Sie $[\mathbb{Q}(\alpha)(\beta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\beta)(\alpha) : \mathbb{Q}]$ und benutzen Sie die Gradformel für Körpererweiterungen.)