Weitere Übungsaufgaben (Zum Selbststudium)

Anne Henke, Sam Thelin, WS 2018

Gruppentheorie

1. (a) Sei N eine normale Untergruppe von G und L eine normale Untergruppe von G/N. Zeigen Sie, dass es eine normale Untergruppe K von G gibt mit $N \subseteq K$, so dass $L = K/N = \{kN : k \in K\}$ gilt.
   (b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\phi : G/N \to G/K$, definiert durch $\phi(gN) = gK$ für $g \in G$, ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist. Bestimmen Sie den Kern von ϕ.

2. Sei G eine Gruppe und sei $S \subseteq G$ eine Teilmenge von G, die G erzeugt, dass heißt $G = \langle S \rangle$.
   (a) Sei H eine Gruppe und seien ϕ und ψ Gruppenhomomorphismen von G nach H. Zeigen Sie: Falls $\phi(s) = \psi(s)$ für alle $s \in S$ ist, dann gilt $\phi = \psi$.
   (b) Wie viele verschiedene Gruppenhomomorphismen gibt es von S_3, der symmetrischen Gruppe der Ordnung 6, nach C_2, der zyklischen Gruppe der Ordnung 2? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ringtheorie

3. Sei S eine nicht-leere Menge. Sei $R = \mathbb{Z}^S = \{f \mid f : S \to \mathbb{Z} \text{ Abbildung}\}$ die Menge aller Abbildungen von S nach $\mathbb{Z}$. Wir wissen, dass R ein Ring ist mit Addition und Multiplikation definiert durch

$$\begin{aligned}(f+g)(s) &= f(s) + g(s),\\ (fg)(s) &= f(s)g(s),\end{aligned}$$

   für $f, g \in R$ und $s \in S$.
   (a) Ist der Ring R kommutativ? Begründen Sie Ihre Antwort.
   (b) Sei $a \in S$. Welche der folgenden Teilmengen von R sind Ideale:
      i. $I_1 = \{f \in R : f(a) \text{ ist ungerade}\}$,
      ii. $I_2 = \{f \in R : f(a) \text{ ist gerade}\}$.
      Begründen Sie Ihre Antwort.
   (c) Sei $a \in S$. Sei $J = \{f \in R : f(a) = 0\}$. Zeigen Sie, dass das Ideal J von R prim ist. Ist J ein maximales Ideal in R? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. (a) Sei $R = \mathbb{Z}_{111}$. Sei $a \in \{\overline{3}, \overline{19}\} \subseteq R$. Gilt $a \in R^\times$, dass heißt hat a ein multiplikatives Inverses? Begründen Sie Ihre Antwort. Falls $a \in R^\times$, geben Sie a^{-1} an. Geben Sie hierbei in Ihren Lösungen alle Rechenschritte an.
   (b) Bestimmen Sie alle Lösungen des Kongruenzensystems:

$$\begin{aligned}2x &\equiv 3 \bmod 7\\ 4x &\equiv 3 \bmod 11\\ 3x &\equiv 1 \bmod 4.\end{aligned}$$

5. (a) Sei $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ und sei $\langle 1+i \rangle$ das von $1+i$ erzeugte Ideal. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]/\langle 1+i \rangle, : z \to z + \langle 1+i \rangle$$

   ein Ringhomomorphismus ist, und dass dieser surjektiv ist.
   (b) Bestimmen Sie den Kern von φ sowie alle Elemente von $\mathbb{Z}[i]/\langle 1+i \rangle$. Begründen Sie Ihre Antwort.

6. Faktorisieren Sie die folgenden Polynome in unzerlegbare Elemente in den angegebenen Ringen:

   (a) $6X^4 + 54X^2 - 9X + 18 \in \mathbb{Z}[X]$;

   (b) $X^3 + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$;

   (c) $X^4 - X^2 - 6 \in \mathbb{R}[X]$;

   (d) $5X^5 - 2X^4 + 8X^2 \in \mathbb{Q}[X]$.

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Körpertheorie

7. Sei $\alpha = \sqrt{2}+i$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ ist und bestimmen Sie das Minimalpolynom $m_{\alpha,\mathbb{Q}}$ von α über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie auch einen Zerfällungskörper für $m_{\alpha,\mathbb{Q}}$ über $\mathbb{Q}$. Begründen Sie Ihre Antwort.

8. Sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit 3 Elementen und sei $R := \mathbb{F}_3[X]/(X^2 + X + 2)$.

   (a) Zeigen Sie, dass $f = X^2 + X + 2 \in \mathbb{F}_3[X]$ unzerlegbar ist.

   (b) Geben Sie alle Elemente von R an.

   (c) Sei $R^\times$ die Gruppe der Einheiten von R. Bestimmen Sie, mit Begründung, die Ordnung von $R^\times$ und zeigen Sie, dass $R^\times$ zyklisch ist.

9. Sei K ein Körper mit $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ und sei L/K eine Körpererweiterung.

   (a) Bestimmen Sie das Kreisteilungspolynom ϕ_9. Zeigen Sie, dass $z = e^{2\pi i/9}$ aus der gegebenen Punktmenge $M = \{0, e^{2\pi i/3}\}$ nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

   (b) Was ist ein *algebraisches Element*, was ist eine *algebraische Körpererweiterung*? Seien $b, c \in L$ algebraisch über K. Zeigen Sie, dass $b + c$ und $b \cdot c$ algebraisch über K sind. Alle Sätze aus der Vorlesung, die Sie benutzen, müssen genau zitiert werden.