2.Übungsblatt zur Algebra

Anne Henke, Sam Thelin, WS 2018

1. (Schriftlich, 9 Punkte.) Sei K ein Körper und $GL_n(K)$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in K. Wir definieren:

$$\begin{aligned} B_n(K) &= \{(a_{ij}) \in GL_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ falls } i > j\}, \\ U_n(K) &= \{(a_{ij}) \in GL_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ falls } i > j \text{ und } a_{ii} = 1 \text{ für alle } i\ \}. \end{aligned}$$

Die Menge $B_n(K)$ besteht also aus allen invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen und $U_n(K)$ besteht aus allen invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen mit Eins auf der Diagonalen.

   (a) Zeigen Sie, dass $B_n(K)$ und $U_n(K)$ Untergruppen von $GL_n(K)$ sind.

   (b) Sei K ein Körper mit q Elementen. Bestimmen Sie die Mächtigkeiten der beiden endlichen Gruppen $B_n(K)$ und $U_n(K)$.

2. (Zum Selbststudium.) Sei G eine Gruppe und seien U, V Untergruppen von G. Zeigen Sie: $U \cup V$ ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn $U \subseteq V$ oder $V \subseteq U$.

3. (Zum Selbststudium.)

   (a) Sei G eine Gruppe und $\emptyset \neq S \subseteq G$. Zeigen Sie, dass

$$\langle S \rangle = \{s_1 \cdots s_t \mid t \in \mathbb{N}_0, s_i \in S \cup S^{-1} \text{ für } 1 \leq i \leq t\}.$$

   Das leere Produkt (für $t = 0$) ist hierbei als 1 definiert.

   (b) Zeigen Sie, dass die symmetrische Gruppe S_n die folgenden Erzeugendensysteme hat:

      i. $S_n = \langle (1\,2), (1\,3), \ldots, (1\,n) \rangle$;

      ii. $S_n = \langle (1\,2), (2\,3), \ldots, (n-1\,n) \rangle$;

      iii. $S_n = \langle (1\,2), (1\,2 \ldots n) \rangle$.

4. (Schriftlich, 11 Punkte.)

   (a) Bestimmen Sie die Einheiten im Ring $\mathbb{Z}_n$ für $2 \leq n \leq 10$.

   (b) Eine ganze Zahl d heisst *quadratfrei*, falls d keinen Teiler a^2 hat für $a \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. Sei d eine quadratfreie ganze Zahl und $R_d = \mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ der kleinste Teilring von $\mathbb{C}$, der $\sqrt{d}$ und $\mathbb{Z}$ enthält. Definieren Sie die Abbildung

$$N : R_d \to \mathbb{Z}, \quad a + b\sqrt{d} \mapsto a^2 - db^2 = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}).$$

   Zeigen Sie:

      i. Abbildung N ist multiplikativ, also $N(xy) = N(x)N(y)$ für alle $x, y \in R_d$.

      ii. Ein Element $x \in R_d$ ist Einheit, genau dann, wenn $N(x) = \pm 1$.

   Bestimmen Sie alle Einheiten von R_d für $d < 0$. Zeigen Sie, dass R_2 unendlich viele Einheiten hat. *Selbststudium:* Können Sie genau alle Einheiten von R_2 bestimmen?

5. (Zum Selbststudium.) Sei Q_8 eine Menge mit acht Elementen, die mit $\pm e$, $\pm i$, $\pm j$ und $\pm k$ bezeichnet werden. Man kann auf Q_8 eine Verknüpfung definieren (dies müssen Sie nicht zeigen), so dass Q_8 eine Gruppe ist (genannt *Quaternionengruppe*) und folgende Regeln gelten:

   - e ist das Einselement;
   - es gelte $i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -e$;
   - es gelten die üblichen Vorzeichenregeln, also z.B. $-(-i) = i$ oder $j \cdot (-i) = -j \cdot i$.

   Bestimmen Sie zu jedem Element in Q_8 das zugehörige Inverse. Was ist $i \cdot j$, was ist $(i \cdot j)^{-1}$? Bestimmen Sie, unter Benutzung obiger Regeln, die Multiplikationstabelle von Q_8.

6. (Zum Selbststudium.)

   (a) Sei $G = \langle g \rangle$ eine zyklische Gruppe mit $|G| > 1$, sei $H \leq G$ eine Untergruppe mit $|H| > 1$ und sei $k = \min\{|i| \colon g^i \in H \text{ und } i \neq 0\}$. Zeigen Sie, dass $H = \langle g^k \rangle$ ist. Folgern Sie, dass jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe zyklisch ist.

   (b) Bestimmen Sie den Untergruppenverband von $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_7$ und $\mathbb{Z}_{12}$.

7. (Zum Selbststudium.) Seien G, H Gruppen. Eine Abbildung $\varphi : G \to H$ heisst *Homomorphismus* oder *Gruppenhomomorphismus*, falls für alle $x, y \in G$ gilt:

$$\varphi(x \cdot_G y) = \varphi(x) \cdot_H \varphi(y).$$

   Ist φ zusätzlich bijektiv, so heißt φ *Isomorphismus*.

   Sei also $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

   (a) Homomorphismus φ ist injektiv, genau dann, wenn $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{e_G\}$ trivial ist.

   (b) Ist φ ein Isomorphismus, so ist G abelsch, genau dann wenn H abelsch ist; ausserdem haben die Elemente $g \in G$ und $\varphi(g) \in H$ dieselbe Ordnung.

8. (Zum Selbststudium.) Zeigen Sie, es gibt bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen der Ordnung vier: C_4 und $C_2 \times C_2$ (auch Kleinsche Vierergruppe V_4 genannt). Hierbei ist $(C_n, \cdot)$ eine zyklische Gruppe der Ordnung n.

   Am Mittwoch 31.Oktober und Donnerstag 1.November finden keine Übungsgruppen statt. Die Lösungen zu den schriftlichen Aufgaben von Blatt 2 werden am Dienstag 30.Oktober vor der Vorlesung eingesammelt. Aufgaben zum Selbststudium werden in der Vortragsübung am Dienstag 30.Oktober um 15:45 – 17:15 besprochen.