3.Übungsblatt zur Algebra

Anne Henke, Sam Thelin, WS 2018

1. (Zum Votieren.) Sei G eine endliche Gruppe.
   (a) Seien $a, b \in G$. Zeigen Sie:
      i. $\operatorname{ord}(a) = \operatorname{ord}(a^{-1})$
      ii. $\operatorname{ord}(aba^{-1}) = \operatorname{ord}(b)$
   (b) Seien $g, h \in G$ mit $gh = hg$.
      i. Sei $\operatorname{ggT}(\operatorname{ord}(g), \operatorname{ord}(h)) = 1$. Zeigen Sie: $\operatorname{ord}(gh) = \operatorname{ord}(g) \cdot \operatorname{ord}(h)$.
      ii. Zeigen Sie, dass im Allgemeinen gilt: $\operatorname{ord}(gh) = \operatorname{kgV}(\operatorname{ord}(g), \operatorname{ord}(h))$.

2. (Zum Votieren.)
   (a) Sei G eine Gruppe. Wir definieren $Z(G) := \{a \in G\colon ag = ga \text{ für alle } g \in G\}$, *das Zentrum* von G. Zeigen Sie, dass $Z(G)$ eine normale Untergruppe von G ist.
   (b) Seien G und H Gruppen. Zeigen Sie, dass $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$ ist.
   (c) Seien G_1 und G_2 Gruppen. Sind alle Untergruppen von $G_1 \times G_2$ von der Form $H_1 \times H_2$ für Untergruppen $H_1 \leq G_1$ und $H_2 \leq G_2$? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.
   (d) Sei K ein Körper, und sei n eine natürliche Zahl. Bestimmen Sie das Zentrum der folgenden Gruppen: Q_8, $\mathrm{SL}_n(K)$, $\mathrm{GL}_n(K)$, $U_3(K)$.

3. (Zum Votieren.) Man sieht leicht, dass die Mengen $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und $\mathbb{R}^{>0} = (0, \infty)$ Gruppen unter Multiplikation sind. (Dies müssen Sie nicht zeigen.)
   (a) Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen?
   $$\begin{aligned} f_1 :&\quad (GL_n(\mathbb{R}), \cdot) \to (GL_n(\mathbb{R}), \cdot), A \mapsto 2A; \\ f_2 :&\quad (\mathbb{R}, +) \to (GL_2(\mathbb{R}), \cdot), x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ f_3 :&\quad \mathbb{C}^\times \to (0, \infty) \times S^1, z \mapsto (|z|, \frac{z}{|z|}). \end{aligned}$$
   Bestimmen Sie für $1 \leq i \leq 3$ den Kern der Abbildung f_i, falls f_i ein Gruppenhomomorphismus ist. Welche der Abbildungen f_i sind Gruppenisomorphismen?
   (b) Ist $S^1 \times \{\pm 1\}$ isomorph zur orthogonalen Gruppe der 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. (Schriftlich, 9 Punkte.) Sei R ein Ring. Ein Element $e \in R$ heißt idempotent, falls $e^2 = e$ ist. Sei e idempotent mit $e \in Z(R) = \{a \in R \mid ar = ra \text{ für alle } r \in R\}$.
   (a) Zeigen Sie, dass das Element $1 - e$ idempotent ist.
   (b) Sei $S := eR = \{er \mid r \in R\}$. Zeigen Sie, dass S ein Ring mit Einselement e ist.
   (c) Zeigen Sie, dass $R \simeq eR \times (1 - e)R$ ist.

5. (Schriftlich, 9 Punkte.)
   (a) Seien D_6 die Diedergruppe der Ordnung 6 und S_3 die symmetrische Gruppe vom Grad 3. Es gilt $D_6 = \{\sigma^i \tau^j \mid 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 1\}$ wobei $\sigma^3 = 1 = \tau^2$ und $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$ (dies müssen Sie nicht zeigen).
      i. Zeigen Sie, dass $S_3 = \{(1\,2\,3)^i (1\,2)^j \mid 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 1\}$ ist.
      ii. Zeigen Sie, dass D_6 und S_3 isomorph sind (beachten Sie, dass $(1\,2)(1\,2\,3) = (1\,3\,2)(1\,2)$ ist).
      iii. Wieviele verschiedene Isomorphismen gibt es zwischen den beiden Gruppen?
   (b) Sind die Gruppen D_8 und Q_8 isomorph (vgl. Aufgabe 7(b) auf Blatt 2)?

6. (Zum Votieren.) Es bezeichnen ABCDE im Uhrzeigersinn die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks. Bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal gehen wir davon aus, dass das Lineal keine Markierungen hat: man kann damit also nur Geraden zeichnen, und keine Strecken abmessen.

   (a) Zeigen Sie, dass $\overline{AB}$ die Strecke $\overline{AC}$ im goldenen Schnitt teilt, d.h.

   $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC} - \overline{AB}}{\overline{AB}}.$$

   Folgern Sie, dass $\overline{AC} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \cdot \overline{AB}$.

   (b) Auf einem Blatt Papier sei nur die Strecke $\overline{AB}$ gegeben. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal das regelmäßige Fünfeck ABCDE.

   (c) Auf einem Blatt Papier sei ein gleichseitiges Dreieck gegeben. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal ein flächengleiches Quadrat.

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.