4.Übungsblatt zur Algebra
Anne Henke, Sam Thelin, WS 2018

1. (Zum Votieren.) Bestimmen Sie alle Untergruppen von C_{30}, D_8, D_{10} und Q_8 und zeichnen Sie die entsprechenden Untergruppenverbände. Welche der vier Gruppen sind abelsch? Finden Sie für jede Gruppe eine Teilmenge kleinster Kardinalität, die diese Gruppe erzeugt. Begründen Sie Ihre Antwort.

2. (Zum Votieren.) Bestimmen Sie alle normalen Untergruppen von C_{30}, D_8, D_{10} und Q_8. Wie verallgemeinert sich Ihr Ergebnis auf die Diedergruppe D_{2n}, mit $n \in \mathbb{N}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. (Zum Votieren.)
   (a) Sei G eine Gruppe und sei $H \leq G$ eine Untergruppe. Bestimmen Sie die Linksnebenklassen G/H sowie die Rechtsnebenklassen $H\backslash G$ in den folgenden Fällen:
      i. $G = D_{12} = \langle r, s \mid r^6 = 1 = s^2, rs = sr^{-1} \rangle$, $H = \langle r \rangle$;
      ii. $G = D_{12} = \langle r, s \mid r^6 = 1 = s^2, rs = sr^{-1} \rangle$, $H = \langle rs \rangle$.
   (b) Seien H_1, H_2 und H_3 Untergruppen von G mit $[G : H_3] = 60$, $[H_3 : H_1 \cap H_3] = 14$, $[H_1 \cap H_3 : H_1 \cap H_2 \cap H_3] = 8$, $|H_1 \cap H_2| = 5$ und $|H_2 \cap H_3| = 7$. Bestimmen Sie $|G|$.
   (c) Gibt es eine Gruppe G mit Untergruppen H_1, H_2 und H_3 derart, dass $[G : H_3] = 12$, $[H_3 : H_1 \cap H_3] = 14$, $[H_1 \cap H_3 : H_1 \cap H_2 \cap H_3] = 8$, $|H_1 \cap H_2| = 5$ und $|H_2 \cap H_3| = 7$? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. (Schriftlich, 11 Punkte.) Seien G und H Gruppen und $\phi \colon G \to H$ ein Homomorphismus.
   (a) Sei $U \leq H$ eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass $\phi^{-1}(U)$ eine Untergruppe von G ist, die normal in G ist, wenn U normal in H ist. Folgern Sie, dass $\mathrm{Ker}(\phi)$ eine normale Untergruppe von G ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $\phi^{-1}(U) = \phi^{-1}(U \cap \mathrm{im}(\phi))$ ist, dass $\mathrm{Ker}(\phi) \subseteq \phi^{-1}(U)$ ist und, dass $|\phi^{-1}(U)| = |\mathrm{Ker}(\phi)| \cdot |U \cap \mathrm{im}(\phi)|$ ist.
   (c) Seien jetzt $|G| = 84$, $H = C_6$ und $\phi \colon G \to H$ ein Epimorphismus. Zeigen Sie, dass G eine normale Untergruppe der Ordnung 28 hat.

5. (Zum Votieren.)
   (a) Seien R und S Ringe. Zeigen Sie, dass $(R \times S)^\times = R^\times \times S^\times$ ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[X]^\times = \mathbb{Z}^\times$ ist. Gilt $R[X]^\times = R^\times$ für jeden Ring R? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

6. (Schriftlich, 10 Punkte.) Seien R und R' Ringe.
   (a) Welche der folgenden Abbildungen sind Ringhomomorphismen?
      i. $\varphi_1 \colon R \to R \times R', r \mapsto (r, 0)$
      ii. $\varphi_2 \colon R \to R \times R, r \mapsto (r, r)$
      iii. $\varphi_3 \colon R \times R' \to R, (r, r') \mapsto r$
      iv. $\varphi_4 \colon R \times R \to R, (r_1, r_2) \mapsto r_1 r_2$
      v. $\varphi_5 \colon R \times R \to R, (r_1, r_2) \mapsto r_1 + r_2$
   (b) Bestimmen Sie jeweils alle Ringautomorphismen von $\mathbb{Z}[i]$ und $\mathbb{Z}[X]$.

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

7. (Zum Selbststudium.) Sei R ein Ring und sei $S \subseteq R$ mit $R = \langle S \rangle$ (das heißt, R wird als Ring von S erzeugt, mit anderen Worten ist R der einzige Unterring von R, der die Untermenge S enthält). Sei Ferner $M_n(R)$ der Ring der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in R, und sei $E_{i,j}(r)$ die Matrix mit $r \in R$ in Position (i,j) und allen übrigen Einträgen gleich 0.

   (a) Zeigen Sie, dass der Ring $M_n(R)$ von der Menge $S_1 = \{E_{i,j}(r) \colon 1 \leq i,j \leq n, r \in R\}$ erzeugt wird.

   (b) Zeigen Sie, dass der Ring $M_n(R)$ von der Menge $S_2 = \{E_{i,1}(r) \colon 1 \leq i \leq n, r \in R\} \cup \{E_{1,j}(r) \colon 1 \leq j \leq n, r \in R\}$ erzeugt wird.

   (c) Wird $M_n(R)$ von der Menge $S_3 = \{E_{i,j}(s) \colon 1 \leq i,j \leq n, s \in S\}$ erzeugt? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.