5.Übungsblatt zur Algebra

Anne Henke, Sam Thelin, WS 2018

1. (Zum Votieren.) Sei G eine Gruppe, sei $H \leq G$ eine Untergruppe und sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler.

   (a) Zeigen Sie: Falls $H \trianglelefteq G$, dann gilt $HN \trianglelefteq G$.

   (b) Sei $N \subseteq H$. Zeigen Sie: Es gilt genau dann $H \trianglelefteq G$, wenn $H/N \trianglelefteq G/N$ ist.

   (c) Wir definieren eine Multiplikation auf der Menge G/H aller Linksnebenklassen von H durch
   $$(g_1H) \cdot (g_2H) = g_1g_2H.$$
   Zeigen Sie: Ist die Multiplikation wohldefiniert, so ist H ein Normalteiler von G.

2. (Zum Votieren.) Sei G eine Gruppe.

   (a) Wir definieren eine Relation $\sim$ auf G durch $g \sim h$, wenn es $x \in G$ existiert mit $h = xgx^{-1}$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf G ist.

   Die Äquivalenzklassen von $\sim$ heißen *Konjugationsklassen*.

   (b) Sei H eine Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass H genau dann ein Normalteiler ist, wenn H eine Vereinigung von Konjugationsklassen von G ist.

   (c) Bestimmen Sie alle Normalteiler von S_4 und S_5.

3. (Schriftlich, 12 Punkte.) Seien G und H Gruppen und sei $\varphi\colon G \to H$ ein Epimorphismus. Bestimmen Sie alle möglichen Isomorphietypen von H in den folgenden Fällen:

   (a) $G = D_8$; (b) $G = D_{10}$; (c) $G = Q_8$; (d) $G = A_4$.

4. (Zum Votieren.) Sei G eine nicht-kommutative Gruppe der Ordnung sechs.

   (a) Welche Ordnung können die Elemente von G haben? Zeigen Sie, dass nicht alle Elemente in $G\backslash\{e\}$ Ordnung zwei haben können. Zeigen Sie, dass nicht alle Elemente in $G\backslash\{e\}$ Ordnung drei haben können.

   (b) Sei nun a ein Element der Ordnung drei und b ein Element der Ordnung zwei in G. Zeigen Sie, dass $\langle a, b\rangle = G$, und dass $\langle a\rangle$ eine normale Untergruppe von G ist. Welche Werte kann bab^{-1} annehmen?

   (c) Bestimmen Sie alle möglichen Isomorphietypen von G.

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

5. (Zum Votieren.)

   (a) Zeigen Sie, dass es zu jedem Element $A \in GL_2(\mathbb{C})$ ein Element $B \in SL_2(\mathbb{C})$ und ein $a \in \mathbb{C}^\times$ gibt mit $A = B \cdot \mathrm{diag}(a, a)$.

   (b) Sei $PGL_2(\mathbb{C}) := GL_2(\mathbb{C})/Z(GL_2(\mathbb{C}))$ und sei $PSL_2(\mathbb{C}) := SL_2(\mathbb{C})/Z(SL_2(\mathbb{C}))$. Sei $\pi : GL_2(\mathbb{C}) \to PGL_2(\mathbb{C})$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, auf zweierlei Weisen, dass $PGL_2(\mathbb{C}) \simeq PSL_2(\mathbb{C})$ ist: Einmal mit Hilfe des Homomorphiesatzes und der Einschränkung $\pi_{|SL_2}$, und einmal mit Hilfe des ersten Isomorphiesatzes.

   (c) Geben Sie einen Körper K an, so dass $PSL_2(K) \neq PGL_2(K)$ ist.

6. (Schriftlich, 7 Punkte.) Sei H eine Untergruppe von S_n mit Index $[S_n : H] = 2$.

   (a) Erklären Sie, warum es einen Gruppenepimorphimus $\varphi : S_n \to \{\pm 1\}$ mit $\mathrm{Ker}(\varphi) = H$ gibt.

   (b) Seien $\tau, \sigma \in S_n$ Transpositionen. Zeigen Sie, dass es $\pi \in S_n$ gibt mit $\sigma = \pi\tau\pi^{-1}$. Folgern Sie, dass $\varphi(\tau) = \varphi(\sigma)$ ist.

   (c) Zeigen Sie, dass $H = A_n$ ist.