6.Übungsblatt zur Algebra

Anne Henke, Sam Thelin, WS 2018

1. (Zum Votieren.) Sei G eine Gruppe und sei N ein Normalteiler von G. Sei $Z(G)$ das Zentrum von G, und G' die Kommutatorgruppe von G. Zeigen Sie:

   (a) Ist $G/Z(G)$ zyklisch, so ist G abelsch.

   (b) Ist G/N abelsch, so ist $G' \subseteq N$.

   Gilt jeweils die Umkehrung? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

2. (Zum Votieren.) Bestimmen Sie die Einheiten der folgenden Ringe R, und entscheiden Sie, ob die angegebenen Teilmengen I zweiseitige Ideale sind.

   (a) R ist die Menge $\mathbb{Z}$ bezüglich Addition und Multiplikation definiert durch

   $$a \oplus b = a + b + 1 \text{ und}$$
   $$a \otimes b = ab + a + b,$$

   und $I = 2\mathbb{Z} = \{2k \colon k \in \mathbb{Z}\}$.

   (b) $R = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und $I = M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$.

   (c) $R = S^X = \{f : X \to S \mid f \text{ Funktion}\}$, der Ring aller Funktionen von einer nicht leeren Menge X in einen Ring S mit punktweiser Addition und Multiplikation, das heißt

   $$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{und} \qquad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

   für alle $f, g \in S^X$ und $x \in X$, und $I = \{f \in R \colon f(x) \in J \text{ für alle } x \in X\}$, wobei J ein zweiseitiges Ideal von S ist.

   (d) R ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X) = \{U \mid U \subseteq X\}$ einer nicht leeren Menge X mit Addition und Multiplikation definiert durch

   $$a + b = (a \cup b) \setminus (a \cap b) \text{ und}$$
   $$a \cdot b = a \cap b,$$

   und $I = \mathcal{P}(Y) = \{U \mid U \subseteq Y\}$, wobei $Y \subseteq X$.

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

3. (Schriftlich, 8 Punkte.)

   (a) Sei R ein kommutativer Ring und seien I und J Ideale in R.

      i. Zeigen Sie, dass $I \cap J$ und

      $$IJ = \{\sum_{k=1}^{n} i_k j_k : n \in \mathbb{N}, i_k \in I, j_k \in J \text{ für } 1 \leq k \leq n\}$$

      Ideale in R sind. Zeigen Sie auch, dass $IJ \subseteq I \cap J$ ist. Unter welchen Voraussetzungen ist $I \cup J$ ein Ideal?

      ii. Seien m und n natürliche Zahlen. Beweisen Sie, dass gilt:

      $$m\mathbb{Z}.n\mathbb{Z} = mn\mathbb{Z} \qquad \text{und} \qquad m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = \text{kgV}(m, n)\mathbb{Z}.$$

4. (Zum Votieren.) Sei R ein kommutativer Ring.

   (a) Sei S ein Unterring und sei I ein Ideal von R. Zeigen Sie, dass $S + I$ ein Unterring von R ist, dass $S \cap I$ ein Ideal von S ist, und dass
   $$(S + I)/I \simeq S/(S \cap I).$$

   (b) Sei $R[X, Y]$ der Polynomring in zwei Variablen X und Y über R. Zeigen Sie, dass
   $$R[X, Y]/\langle Y - X^3\rangle \simeq R[X],$$
   wobei $\langle Y - X^3\rangle$ das von $Y - X^3$ erzeugte Ideal in $R[X, Y]$ bezeichnet.

5. (Schriftlich, 8 Punkte.) Seien R und S kommutative Ringe.

   (a) Sei I ein Ideal von $R \times S$. Zeigen Sie, dass es Ideale $J \trianglelefteq R$ und $K \trianglelefteq S$ gibt, so dass $I = J \times K$ ist, und, dass $(R \times S)/I \simeq R/J \times S/K$ ist.

   (b) Bestimmen Sie, mit Hilfe der Idealkorrespondenz, alle Ideale I von $\mathbb{Z}^2/\langle(6, 8)\rangle$, wobei $\langle(6, 8)\rangle$ das von $(6, 8)$ erzeugte Ideal von $\mathbb{Z}^2$ bezeichnet. Begründen Sie Ihre Antwort.

6. (Zum Votieren.) In dieser Aufgabe konstruieren wir den Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ aus dem Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Auf der Menge $M = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definieren wir eine Relation $\sim$ wie folgt: Es gilt genau dann $(a, b) \sim (c, d)$, wenn $ad = bc$ ist.

   (a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist.

   Die Äquivalenzklassen dieser Relation bezeichnen wir mit $[a, b] := [(a, b)]$. Auf der Menge $R := M/\sim$ aller Äquivalenzklassen definieren wir Addition und Multiplikation durch
   $$[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd] \qquad \text{und} \qquad [a, b] \cdot [c, d] = [ac, bd]$$
   für alle $(a, b), (c, d) \in M$.

   (b) Zeigen Sie, dass die Operationen $+$ und $\cdot$ wohldefiniert sind.

   (c) Ziegen Sie, dass in R mit diesen Operationen das Folgende gilt:
      i. R hat ein neutrales Element bezüglich Addition, und eines bezüglich Multiplikation.
      ii. Jedes Element von R hat ein additives Inverses.
      iii. Jedes Element von R, außer dem neutralen Element bezüglich Addition, hat ein multiplikatives Inverses.

   Sie dürfen jetzt annehmen, dass $(R, +, \cdot)$ ein Körper ist.

   (d) Zeigen Sie das Folgende:
      i. Es existiert ein injektiver Ringhomomorphismus $\iota\colon \mathbb{Z} \to R$.
      ii. Sei K ein Körper und sei $\phi\colon \mathbb{Z} \to K$ ein injektiver Ringhomomorphismus. Dann existiert ein injektiver Ringhomomorphismus $\psi\colon R \to K$ mit $\psi \circ \iota = \phi$.