9.Übungsblatt zur Algebra
Anne Henke, Sam Thelin, WS 2018

1. (Schriftlich, 10 Punkte)

   (a) Sei $n \geq 2$ eine positive, ganze Zahl, und seien $R_1, R_2, \ldots, R_n$ Hauptidealringe. Zeigen Sie, dass jedes Ideal in $R := R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ ein Hauptideal ist. Ist R ein Hauptidealring?

   (b) Sei X eine nicht leere Menge. Wir betrachten den Ring $R = \mathcal{P}(X) = \{U \mid U \subseteq X\}$ mit Addition und Multiplikation definiert durch
   $$a + b = (a \cup b) \setminus (a \cap b) \qquad \text{und} \qquad a \cdot b = a \cap b.$$

      i. Sei X eine endliche Menge. Zeigen Sie, dass jedes Ideal in $R = \mathcal{P}(X)$ ein Hauptideal ist.

      ii. Sei X eine unendliche Menge, und sei $I = \{U \subseteq X \mid U \text{ endlich}\}$. Zeigen Sie, dass I ein Ideal von $R = \mathcal{P}(X)$ ist. Zeigen Sie auch, dass I kein Hauptideal ist.

2. (Zum Votieren.) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

   (a) R ist ein Körper.

   (b) Für jeden Ring S mit Eins ist jeder Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to S$ injektiv.

   (c) R ist ein euklidischer Ring ohne Primelemente.

3. (Zum Votieren.) Sei $d \neq \pm 1$ eine quadratfreie, ganze Zahl und sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Auf Übungsblatt 2 haben wir gesehen, dass die Norm $N\colon R \to \mathbb{Z}$ definiert durch
   $$N(a + b\sqrt{d}) = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - db^2$$
   eine multiplikative Abbildung ist (das heißt $N(xy) = N(x)N(y)$), mit der Eigenschaft, dass $x \in R$ genau dann eine Einheit ist, wenn $N(x) = \pm 1$ ist.

   (a) Zeigen Sie, dass wenn $x|y$ in R gilt, dann gilt $N(x)|N(y)$ in $\mathbb{Z}$. Folgern Sie, dass wenn x assoziiert zu y ist, dann gilt $N(x) = \pm N(y)$. Zeigen Sie auch, dass wenn $N(x)$ eine Primzahl ist, dann ist x unzerlegbar in R.

   (b) Faktorisieren Sie die Elemente $3 - \sqrt{-2}$ und $5 + 2\sqrt{-2}$ in unzerlegbare Elemente in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

   (c) Zeigen Sie, dass die Faktorisierung von 14 in unzerlegbare Elemente in $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ bis auf Umsortierung und Assoziiertheit nicht eindeutig ist.

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

4. (Schriftlich, 10 Punkte.) Sei $\omega = e^{2\pi i/3} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, und sei $\mathbb{Z}[\omega]$ der kleinste Teilring R von $\mathbb{C}$, der sowohl $\mathbb{Z}$ als auch ω enthält.

   (a) Zeigen Sie, dass $|w|^2 = w\overline{w} = 1$, dass $w + \overline{w} = -1$, und dass $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ ist. Folgern Sie, dass $R = \mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega\colon a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist.

   (b) Wir definieren $\delta\colon R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0\colon a + b\omega \mapsto |a + b\omega|^2 = (a + b\omega)(a + b\overline{\omega})$. In diesem Teil wollen wir zeigen, dass δ eine euklidische Funktion auf R ist.

      i. Sei $a + b\omega \in R$ und sei $c + d\omega \in R \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass es $s, t \in \mathbb{Q}$ gibt, mit
      $$\frac{a + b\omega}{c + d\omega} = \frac{(a + b\omega)(c + d\overline{\omega})}{(c + d\omega)(c + d\overline{\omega})} = s + t\omega.$$

      ii. Seien jetzt $m, n \in \mathbb{Z}$ so gewählt, dass $|s - m| \leq \frac{1}{2}$ und $|t - n| \leq \frac{1}{2}$ gilt. Zeigen Sie, dass gilt:
      $$\delta((s - m) + (t - n)\omega) < 1.$$

      iii. Folgern Sie, dass δ eine euklidische Funktion auf R ist.

5. (Zum Votieren.) Der Satz von Euklid sagt, dass es unendlich viele Primzahlen (oder, äquivalent, unendlich viele unzerlegbare Elemente in $\mathbb{Z}$) gibt. In dem klassischen Beweis nimmt man an, dass es nur endlich viele Primzahlen $p_1, \cdots, p_k$ gibt, und erreicht durch Betrachtung der Zahl $p_1 \cdots p_k + 1$ einen Widerspruch.

   (a) Passen Sie (sorgfältig!) Euklids klassischen Beweis an, um zu zeigen, dass $R = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ unendlich viele nicht paarweise assoziierte unzerlegbare Elemente hat.

   (b) Sei jetzt R ein faktorieller Ring. Lässt sich Euklids klassischer Beweis anpassen, um zu zeigen, dass R unendlich viele nicht paarweise assoziierte unzerlegbare Elemente hat? Begründen Sie Ihre Antwort.

6. (Zum Selbststudium.) In dieser Aufgabe suchen wir alle Lösungen $x, y \in \mathbb{Z}$ der Gleichung $y^2 + 2 = x^3$. Zu diesem Zweck betrachten wir den Ring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, der vermöge der multiplikativen, euklidischen Funktion $\delta\colon R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0\colon a + b\sqrt{-2} \mapsto a^2 + 2b^2$ ein euklidischer Ring ist. Sei (x, y) eine ganzzahlige Lösung der obigen Gleichung.

   (a) Zeigen Sie, dass y notwendigerweise ungerade ist (*Hinweis*: Betrachten Sie $y^2 + 2$ und x^3 modulo 4).

   (b) Es gilt $y^2 + 2 = (y + \sqrt{-2})(y - \sqrt{-2})$ in R (dies müssen Sie nicht zeigen). Sei s ein Element in R, dass sowohl $y + \sqrt{-2}$ als auch $y - \sqrt{-2}$ teilt. Zeigen Sie, dass s ein Teiler von $2\sqrt{-2}$ in R ist. Zeigen Sie auch, das $\delta(s)$ in $\mathbb{Z}$ sowohl 8 als auch $y^2 + 2$ teilt. Folgern Sie, dass s eine Einheit ist.

   (c) Folgern Sie mit Hilfe von Teil (b) und der Gleichung $(y + \sqrt{-2})(y - \sqrt{-2}) = x^3$, dass es ein Element $a + b\sqrt{-2}$ in R gibt, mit $y + \sqrt{-2} = (a + b\sqrt{-2})^3$ (*Hinweis*: R ist ein faktorieller Ring mit ± 1 als einzigen Einheiten).

   (d) Folgern Sie, dass $1 = b(3a^2 - 2b^2)$ ist. Bestimmen Sie die möglichen Werte von a und b, und finden Sie alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $y^2 + 2 = x^3$.