Gruppenübung 02

Aufgabe 1 (Logik, Mengen, Funktionen) Zeigen Sie für eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ und Teilmengen $C, C_1, C_2 \subseteq A$ bzw. $D \subseteq B$:

(i) $f(C_1 \cap C_2) \subseteq f(C_1) \cap f(C_2)$. Geben Sie ein Beispiel an für $f(C_1 \cap C_2) \neq f(C_1) \cap f(C_2)$.

(ii) $C \subseteq f^{-1}(f(C))$. Geben Sie ein Beispiel an für $C \neq f^{-1}(f(C))$.

(iii) $f(f^{-1}(D)) \subseteq D$. Geben Sie ein Beispiel an für $f(f^{-1}(D)) \neq D$.

Aufgabe 2 (Gruppen)

(i) Es sei $G := \{e, a, b, c\}$ eine Menge mit 4 paarweise verschiedenen Elementen. Füllen Sie die folgende Tabelle so aus, dass G zusammen mit der Abbildung $*\colon G \times G \to G$ eine Gruppe ist mit der Eigenschaft, dass für alle $g \in G$ die Gleichung $g^2 = e$ gilt, wobei e das neutrales Element ist. Begründen Sie kurz.

$*$	e	a	b	c
e				
a				
b				
c				

(ii) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e, und es gelte für alle $g \in G$ die Gleichung $g^2 = e$. Beweisen Sie, dass $(G, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 3 (Ring, Körper)
Sei R ein Ring und K ein Körper. Zeigen Sie, dass gilt:

(i) [Satz 3.3 (iii)] $\forall x \in R: \ (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

(ii) [Satz 3.5 (ii)] $\forall a \in K \ \forall\, b, c, d \in K\backslash\{0\} : \dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

(iii) [Satz 3.5 (iii)] $\forall a, c \in K \ \forall\, b, d \in K\backslash\{0\} : \dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{a\ d \pm b\ c}{b \cdot d}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (vollständige Induktion)

(i) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$

$$\text{[Satz 3.10 (i)]} \quad \forall q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}: \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

(ii) Beweisen Sie

$$\text{[Satz 3.10 (ii)]} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}: \; a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k \, b^{n-1-k}.$$

Hinweis: verwenden Sie entweder $a^{n+1} - b^{n+1} = a(a^n - b^n) + b^n(a-b)$ und vollständiger Induktion oder Teilaufgabe (i).

Aufgabe 5 [**Schriftliche Aufgabe 4 Punkte**]

(i) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung gilt

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(ii) Sei R ein Ring. Beweisen Sie

$$\text{[Satz 3.3 (iv)]} \quad \forall x, y, z \in R: \; (-x) \cdot (y-z) = -x \cdot y + x \cdot z.$$

Sie können im Beweis eines der Gesetze aus Aufgabe 3 verwenden.