



## Gruppenübung 04

### Aufgabe 1 (Potenzgesetze)

Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich.

(i)  $\frac{\sqrt[3]{b^3} \sqrt[5]{b^8}}{\sqrt[4]{b^n}}, b \in \mathbb{R}_{>0}, n \in \mathbb{N};$

(ii)  $\frac{(2ax + 2ay)^m (bx - by)^n}{(cx^2 - cy^2)^{m+n}}, a, b, c, x, y \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}, c \neq 0, |x| \neq |y|.$

### Aufgabe 2 [Schriftliche Aufgabe 4 Punkte]

(1) Verwenden Sie den Euklidischen Algorithmus zur Berechnung von  $\text{ggT}(4018, 3362)$ .

(2) Beweisen Sie dass für alle  $n, m \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$(n \text{ gerade} \vee m \text{ gerade}) \iff m \cdot n \text{ gerade.}$$

### Aufgabe 3 (Induktion-Kombinatorik)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

(i)  $\forall n \in \mathbb{N} : 11^n - 4^n$  ist ein Vielfaches von 7.

(ii)  $\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N}$  mit  $m \leq n : \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$

Hinweis: Satz 4.2.

### Aufgabe 4 (Primzahlen-Teilbarkeit)

(1) Beweisen Sie die folgende Teilbarkeitsregeln für alle  $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ :

(i)  $(a \mid b \wedge b \mid c) \Rightarrow a \mid c;$

(ii)  $(a \mid b \wedge a \mid c) \Leftrightarrow a \mid \text{ggT}(b, c).$

(2) Sei  $p$  eine Primzahl. Beweisen Sie:

$$\forall m \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 < m < p : p \mid \binom{p}{m}.$$

(3) Zeigen Sie mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises die Gültigkeit folgender Aussage:  
"Ist  $p$  eine Primzahl, so ist  $\sqrt{p}$  eine irrationale Zahl."

Hinweis: der Fundamentalsatz der Arithmetik.