Gruppenübung 05

Aufgabe 1 (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität)
Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad f(x) = \frac{x}{1+x}, \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x-1}{1+x^2}.$$

a) Weisen Sie nach, dass f injektiv ist.

b) Bestimmen Sie den genauen Wertebereich $I = f(\mathbb{R}_0^+)$ und, da f als Funktion $\mathbb{R}_0^+ \longrightarrow I$ bijektiv ist, die Umkehrfunktion $f^{-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$.

c) Weisen Sie nach, dass g weder injektiv noch surjektiv ist.

Aufgabe 2 (Polynome)

a) Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen des Polynoms $p(x) = 6x^3 + 7x^2 - 61x + 28$. Hinweis: Das Polynom besitzt mindestens eine rationale Nullstelle.

b) Gegeben seien die beiden Polynome

$$p(x) = x^3 - x^2 + x - 1, \qquad q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 + x - 1.$$

Bestimmen Sie mithilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler dieser Polynome.

Aufgabe 3 **[Schriftliche Aufgabe (4 Punkte)]**

a) Betrachten Sie die rationale Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}.$$

Bestimmen Sie mithilfe von Polynomdivision ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ so, dass die Einschränkung

$$f|_I : I \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

eine bijektive Abbildung ist.

b) Stellen Sie die komplexe Zahl $\frac{2+i}{1-i}$ in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

Aufgabe 4 (Komplexe Zahlen)
Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$i) \qquad z_1 = \overline{(3+2i)}(2-i)^2(1-i)^2, \qquad ii) \qquad z_2 = \frac{2+i}{3-i} + \left(\frac{5+2i}{3i}\right)^{-1}.$$