Gruppenübung 06

Aufgabe 1 (Wahr oder Falsch)

Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an.
Es ist möglich, dass in einer Teilaufgabe keine oder mehrere Aussagen richtig sind.

a) Der Realteil einer komplexen Zahl

[ ] ist reell [ ] ist imaginär
[ ] kann negativ sein [ ] ist nie gleich Null

b) Der Imaginärteil einer komplexen Zahl

[ ] ist imaginär [ ] kann negativ sein [ ] ist reell

c) Der Betrag einer komplexen Zahl

[ ] ist reell [ ] hat einen Imaginärteil ungleich Null
[ ] ist größer oder gleich Null [ ] ist eindeutig bestimmt

d) Das Argument einer komplexen Zahl

[ ] ist reell [ ] hat einen Imaginärteil ungleich Null
[ ] ist größer oder gleich Null [ ] ist eindeutig bestimmt

e) Der Imaginärteil einer reellen Zahl

[ ] ist gleich Null [ ] existiert nicht

f) Der Betrag einer reellen Zahl

[ ] ist die reelle Zahl selber [ ] ist größer oder gleich Null

g) Der Imaginärteil einer imaginären Zahl

[ ] ist die imaginäre Zahl selber [ ] ist die imaginäre Zahl geteilt durch i

h) Der Betrag einer imaginären Zahl

[ ] ist gleich Null [ ] existiert nicht

Aufgabe 2 (Komplexe Zahlen)

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument von $(1-\sqrt{3}i)^{2017}$.

b) Bestimmen Sie alle Nullstellen in $\mathbb{C}$ des Polynoms $p(x) = x^3 - x^2 + 2$ und stellen Sie diese jeweils in kartesischen Koordinaten dar.

   Hinweis: das Polynom p besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{Q}$. Verwenden Sie Satz 5.9 um diese Nullstelle zu finden.

c) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $4z^3 = \overline{z}$. Geben Sie die Lösungen in der Form $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ an.

d) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge von $\mathbb{C}$:

$$A := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z+i) < 4 + 3\mathrm{Re}(z) \wedge |z + i - 1| \geq 1\}\,.$$

Aufgabe 3 **[Schriftliche Aufgabe (4 Punkte)]**

a) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge von $\mathbb{C}$:

$$M := \left\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2 \wedge \tfrac{2}{3}\pi < \arg\left(ze^{-i\frac{\pi}{4}}\right) < \tfrac{3}{4}\pi\right\}.$$

b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 + 8 = 0$. Geben Sie die Lösung sowohl in der Form $z = r\, e^{i\varphi}, r \in (0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi)$ als auch in der Form $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 4 (Lineare Gleichungssystemen)
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + tx_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_1 - tx_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

mit Parameter $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie, für welche Werte von t das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt, für welche Werte von t das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt und für welche Werte von t das Gleichungssystem keine Lösung besitzt. Bestimmen Sie außerdem alle Lösungen (in Abhängigkeit von t).