Gruppenübung 08

Aufgabe 1 (Linearkombination, linear unabhängig).

a) Prüfen Sie jeweils, ob die angegebenen Vektoren linear unabhängig sind:

i) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

ii) $u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^4$.

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

linear abhängig?

c) Gegeben seien drei linear unabhängige Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Ist das Tripel $x = a + b - 2c, y = -a + c, z = 2b - 2c$ linear unabhängig? Und ist $\{x, y, c\}$ linear unabhängig?

Aufgabe 2 (Linear unabhängige Menge).
Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Beweisen Sie Ihre Antwort.

a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Jede Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ von paarweise linear unabängigen Vektoren ist linear unabhängig.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Jede Menge $M \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ von paarweise orthogonalen Vektoren ist linear unabhängig.

Hinweis: Die Falschheit einer Aussage kann man in vielen Fällen durch Angabe eines Gegenbeispiels beweisen.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (Basis)
Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der folgenden Vektorräume:

i) Die lineare Hülle in $\mathbb{R}^3$ von

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

ii) $\left\{ \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : Z + iW = 0 \right\}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$.

iii) $\left\{ \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : Z + iW = 0 \right\}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Ergänzen Sie außerdem Ihre Basisvektoren von $\operatorname{Span}(M)$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4 [Schriftliche Aufgabe (4 Punkte)]

a) Bestimmen Sie eine Basis der Ebene $E : x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$ in $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie außerdem ein Erzeugendensystem von E, das keine Basis von E ist.

b) Sei $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ so dass $\operatorname{Span}\{v_1, v_2\}$ und $\operatorname{Span}\{v_1, v_3\}$ verschiedenen Ebenen sind. Beweisen Sie dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 5 (Vektorraum der reellen Polynome)
Es bezeichne P_3 den Vektorraum der reellen Polynome bis zum Grad 3.

a) Seien $f_k(x) = x^k, k = 0, 1, 2, 3$. Zeigen Sie dass $\{f_k : k = 0, 1, 2, 3\}$ eine Basis von P_3 bildet. Welche Dimension hat dieser Raum?

b) Seien $g_k(x) = (x + 1)^k, k = 0, 1, 2, 3$. Stellen Sie das Polynom $q(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ als Linearkombination der Vektoren $g_k, k = 0, 1, 2, 3$ dar.

c) Beweisen Sie dass $W = \{p \in P_3 : p(1) = 0\}$ ein Unterraum von P_3 ist. Bestimmen Sie eine basis von W.

Frohe Weihnachten!