Gruppenübung 11

Aufgabe 1 (schriftliche Aufgabe - 4 Punkte)

i) Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen M_i, $i = 1, 2$, Eigenwerte und Eigenvektoren und die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

ii) Geben Sie eine Matrix S_1 an, sodass $S_1^{-1} M_1 S_1$ eine Diagonalmatrix ist.

iii) Geben Sie eine orthogonale Matrix S_2 an, sodass $S_2^T M_2 S_2$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 2 (Eigenwerte und Eigenvektoren, Diagonalisierung)

i) Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen M_i, $i = 1, 2, 3$, Eigenwerte und Eigenvektoren und die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii) Geben Sie, falls möglich, Matrizen S_1 und S_2 an, sodass $S_1^{-1} M_1 S_1$ und $S_2^{-1} M_2 S_2$ Diagonalmatrizen sind.

iii) Geben Sie, falls möglich, eine orthogonale Matrix S_3 an, sodass $S_3^T M_3 S_3$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 3 (Diagonalisierung in Abhängigkeit eines Parameters)
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Matrix A_α gegeben durch

$$A_\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 4 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}$$

Für welche α gibt es eine orthogonale Matrix S, sodass

$$S^T A_\alpha S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

gilt? Geben Sie eine solche Matrix S an.

Aufgabe 4 (Beweisaufgabe zu Eigenwerten und Diagonalisierbarkeit)

i) Sei A eine Matrix aus $\mathbb{C}^{n\times n}$, für welche gilt, dass $A^2 + A^4 = -E_n$. Kann A reelle Eigenwerte haben?

ii) Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nennt man simultan diagonalisierbar, wenn es eine reguläre Matrix $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt, sodass die beiden Matrizen $C^{-1}AC$ und $C^{-1}BC$ Diagonalgestalt haben.

Beweisen Sie: Sind A und B simultan diagonalisierbar, so gilt $AB = BA$.

Hinweis: Zeigen Sie diese Behauptung zunächst für Diagonalmatrizen.