Priv. Doz. Dr. Düll
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Mathematik I für Informatik und Softwaretechnik

Scheinklausur **08. 02. 2014**

Scheinklausur

für Studierende der Fachrichtungen
inf, swt

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer und Namen des Tutors.
- Legen Sie Ihren Studentenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Taschenrechner, Mobiltelefone etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 eigenhändig beschriebene DIN-A4 Seiten.
- Bei **Aufgaben 2 und 4** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Bei **allen anderen Aufgaben** wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt, Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- In dieser Klausur können bis zu **36 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1(1 Punkte): Name: | | Matrikel-Nr: | |

Kreuzen Sie den Namen Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors an.

Carsten Dietzel	Mathias Tira	Fabian Dyga	Martin Wiest
Melanie Knupfer	Fatmana Arici	Verena Wenzel	Terpsi Karadali

Aufgabe 2(3 Punkte): Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (2\,k-1)^2 = \frac{4\,n^3 - n}{3}.$$

Vollständige Rechnung auf separatem Blatt.

Aufgabe 3(4+2 Punkte):

i) Berechnen Sie Realteil und Imaginärteil der folgenden Zahlen

	Re Z	Im Z
$Z = (1+3\,i)^2$		
$Z = \mathrm{Im}\,(5-i) + \mathrm{Re}\,(2+3\,i)$		
$Z = \dfrac{7+i}{1-2\,i}$		
$Z = \lvert 3-4\,i\rvert\,\overline{(1-2\,i)}$		

ii) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $Z^4 = 16i$ in der Form $r\,e^{i\,\varphi}$, $r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi[$.

Aufgabe 4(3 Punkte): Gegeben sind die Vektoren aus $\mathbb{R}^3$:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie den Vektor x als Linearkombination der Vektoren v_1, v_2 und v_3 dar, d.h. bestimmen Sie Parameter $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ so, dass $x = \alpha\, v_1 + \beta\, v_2 + \gamma\, v_3$.
Vollständige Rechnung auf separatem Blatt.

Aufgabe 5(5 Punkte): Die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist durch die Matrixdarstellung

$$M_L^{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

bzgl. der kanonischen Basis $\mathcal{E}_2$ gegeben. Sei $B := \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine weitere Basis des $\mathbb{R}^2$.

i) Warum ist B ein Orthogonalsystem?

ii) Warum ist B keine Orthonormalbasis?

iii) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $M_{Id_{\mathbb{R}^2}}^{\mathcal{E}_2,B}$ und $M_{Id_{\mathbb{R}^2}}^{B,\mathcal{E}_2}$.

$M_{Id_{\mathbb{R}^2}}^{\mathcal{E}_2,B} =$ $\qquad$ $M_{Id_{\mathbb{R}^2}}^{B,\mathcal{E}_2} =$

iv) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $M_L^{B,B}$ von L bzgl. B: $M_L^{B,B} =$

Aufgabe 6(6 Punkte): Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind, für alle reelle $n \times n$-Matrizen A, B, für alle $n \in \mathbb{N}$.
Falsche Antworten führen innerhalb der Aufgabe zu Punktabzug.

i) A ist nicht invertierbar $\Longleftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind 0. wahr ☐ falsch ☐

ii) $\det(-A) = -\det(A)$. wahr ☐ falsch ☐

iii) A und A^T haben die gleichen Eigenwerte. wahr ☐ falsch ☐

iv) Falls A und B orthogonal, so ist auch $A\, B^T$ orthogonal. wahr ☐ falsch ☐

v) Sei A orthogonal. Die Spalten von A bilden eine ONB von $\mathbb{R}^n$. wahr ☐ falsch ☐

vi) A hat n Eigenwerte und n linear unabhängige Eigenvektoren. wahr ☐ falsch ☐

Aufgabe 7(2+1+2 Punkte): Gegeben ist das reelle, lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A, abhängig von α. $\det(A) =$ $\boxed{}$

ii) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das System $Ax = 0$ nicht-triviale Lösungen? $\alpha =$ $\boxed{}$

iii) Sei A wie oben und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\det(B)$ sowie $\det(A^T\, B)$ in Abhängigkeit von α. $\det(B) =$ $\boxed{}$ $\det(A^T\, B) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 8(2+1+4 Punkte): Gegeben ist die folgende reelle Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -8 \\ -2 & -4 & -1 \\ 4 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

i) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A an:

$\chi_A(\lambda) =$ $\boxed{}$

ii) Es ist $v_1 = (0, 1, 0)^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert μ_1 der Matrix A. Berechnen Sie μ_1.

$\mu_1 =$ $\boxed{}$

iii) Bestimmen Sie die weiteren Eigenwerte μ_2, μ_3 und zugehörige Eigenvektoren v_2, v_3 von A:

$\mu_2 =$ $\boxed{}$, $\mu_3 =$ $\boxed{}$,

$v_2 =$ $\boxed{}$, $v_3 =$ $\boxed{}$.