MATHEMATIK I-II FÜR INF, SWT

WOLF–PATRICK DÜLL

UNIVERSITÄT STUTTGART

WINTERSEMESTER 2016/17, SOMMERSEMESTER 2017

Teil I

Grundlagen

1 Logik

Aussagen und die formale mathematische Sprache

Die Mathematik ist eine Ansammlung von Aussagen über bestimmte Objekte (z.B. Mengen, Zahlen). Diese Aussagen (Formeln) sind dadurch charakterisiert, dass sie entweder wahr oder falsch sind ("tertium non datur").

Beispiel
$1+1=2$ ist eine wahre Aussage.
$1+1=3$ ist eine falsche Aussage.
$1+1$ ist keine Aussage.

Um Aussagen unmissverständlich und platzsparend aufschreiben zu können, führen wir eine formale mathematische Sprache ein.

Aufbau der formalen mathematischen Sprache:

1. Alphabet

   Vorrat an Zeichen für

   - Konstanten, z.B. 1, 0, π
   - Variablen, z.B. x, y, ε

     Variablen können mit Konstanten belegt werden, z.B. beim Lösen von Gleichungen wie z.B. $x^2 = 4$
   - Relationen, z.B. $<$, $>$, $\subset$
   - Funktionen und Verknüpfungen, z.B. $\sin$, $\cos$, $+$, $\cup$
   - Relationsvariablen, z.B. R
   - Funktions- und Verknüpfungsvariablen, z.B. $f, g, *$
   - Logische Zeichen
     - Junktoren, z.B. $\wedge, \vee, \neg$
     - Quantoren, z.B. $\exists, \forall$
     - Gleichheitszeichen $=$
   - Klammern, z.B. $(,)$

   Mit Hilfe dieser Zeichen werden alle mathematischen Objekte definiert und bezeichnet.

2. Aneinanderreihung der Zeichen zu Termen, z.B. $1+1$, und zu Formeln, z.B. $1+1=2$.

Axiome und logisches Schließen

Frage: Welche Aussagen (Formeln) sind wahr?

Einige Formeln werden als wahr vorausgesetzt (Axiome).
Der Wahrheitswert der anderen Aussagen soll durch logisches Schließen unter Voraussetzung der Axiome ermittelt werden (mathematischer Beweis).
Das logische Schließen folgt nach festen Regeln.
Einige dieser Regeln werden ebenfalls als logische Axiome vorausgesetzt, die anderen Regeln lassen sich durch Kombinationen der logischen Axiome gewinnen.

Festlegung der logischen Schlussregeln:

1. Möglichkeit: durch Wahrheitstafeln,
2. Möglichkeit: durch einen Logikkalkül.

Wahrheitstafeln

Jede wahre Aussage erhält den Wahrheitswert 1, jede falsche den Wahrheitswert 0. Seien A,B,... Aussagen. In Abhängigkeit ihrer Wahrheitswerte w(A), w(B),... werden die Wahrheitswerte von Aussagen, die aus A,B,... und logischen Zeichen zusammengesetzt sind, festgelegt.

Wichtige Beispiele:

1) $\neg$A: nicht A, Negation von A

A	$\neg$ A
1	0
0	1

2) A $\wedge$ B: A und B

3) A $\vee$ B: A oder B

4) A XOR B: entweder A oder B

5) A NAND B: nicht (A und B)

6) A NOR B: nicht (A oder B)

A	B	A$\wedge$B	A$\vee$B	A XOR B	A NAND B	A NOR B
1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1

7) A $\rightarrow$ B: "aus A folgt B", "A impliziert B", "wenn A, dann B"

A	B	A$\rightarrow$ B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Die Zuweisung w(A $\rightarrow$ B)=1 in der dritten und vierten Zeile nennt man auch "ex falso quodlibet".
Ist A $\rightarrow$ B wahr, also w(A $\rightarrow$ B)=1, dann schreiben wir auch A $\Rightarrow$ B.
Man nennt in diesem Fall A eine hinreichende Bedingung für B und B eine notwendige Bedingung für A.

Beispiel
$x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$

Kennt man den Wahrheitswert einer aus mehreren Aussagen und logischen Zeichen zusammengesetzten Aussage, dann kann man manchmal daraus Wahrheitswerte von einzelnen Bestandteilen ermitteln.

8) A $\leftrightarrow$ B: "A ist äquivalent zu B", "genau dann A, wenn B"

A	B	A$\leftrightarrow$ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ist w(A $\leftrightarrow$ B)=1, dann schreiben wir auch A $\Leftrightarrow$ B.

Beispiel

$2x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Tautologien

Eine aus den Aussagen A, B,... und logischen Zeichen zusammengesetzte Aussage, die unabhängig von w(A), w(B),... immer wahr ist, heißt Tautologie. Tautologien können durch Wahrheitstafeln nachgewiesen werden.

Beispiele

1) $A \vee \neg A$

2) $\neg(A \wedge \neg A)$ (Satz vom Widerspruch)

3) $A \wedge (A \to B) \Rightarrow B$

4) $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$

A	B	$\neg A$	$\neg$ B	$A \to B$	$\neg B \to \neg A$	$A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

5) $A \to B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$

6) $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

7) $(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \Leftrightarrow B$ (Fallunterscheidungsregel)

8) De Morgan'sche Regeln

a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

9) $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow A \to C$ (Transitivität der Implikation)

10) Distributivgesetze

a) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

b) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Anwendungen von Tautologien:

1) Tautologien liefern wichtige Beweistechniken.

Beispiel

Es gibt 3 Alternativen, um $A \Rightarrow B$ zu beweisen:

a) Direkter Beweis

Angenommen, A sei wahr (anderenfalls gilt ohnehin $A \Rightarrow B$). Dann zeigt man durch eine Kette von logischen Schlüssen die Gültigkeit von B.

b) Indirekter Beweis

Zeige $\neg B \Rightarrow \neg A$ durch einen direkten Beweis.

c) Widerspruchsbeweis

Zeige, dass aus $A \wedge \neg B$ ein Widerspruch folgt, d.h. $A \wedge \neg B \Rightarrow C \wedge \neg C$ für irgendeine Aussage C. Dann muss $A \wedge \neg B$ falsch sein und somit $A \Rightarrow B$ gelten.

2) Aufgrund von Tautologien ist jede logische Verknüpfung von 2 Aussagen A,B (es gibt 16 verschiedene solche Verknüpfungen) jeweils äquivalent zu einer Aussage, in der nur A, B, $\neg$ und $\vee$ auftreten, sowie äquivalent zu einer Aussage, in der nur A, B, $\neg$ und $\wedge$ auftreten.

Beispiel

$A \to B \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$

Außerdem ist jede dieser 16 Aussagen jeweils äquivalent zu einer Aussage, in der nur A,B und NAND auftreten, sowie äquivalent zu einer Aussage, in der nur A,B und NOR auftreten.

Beispiel

$A \wedge B \Leftrightarrow$ (A NAND B) NAND (A NAND B),

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow$ ((A NAND B) NAND (A NAND B)) NAND ((A NAND B) NAND (A NAND B))

3) Tautologien helfen bei der Konstruktion und bei der Vereinfachung von elektrischen Schaltkreisen (Grundlage eines jeden Computers).

Quantoren

Sei A(x) eine Aussage, in der die Variable x vorkommt.

Bezeichnungen:

$\forall$ x: A(x) "für alle x gilt A(x)"

$\exists$ x: A(x) "es existiert ein x, so dass A(x) gilt"

$\exists!$ x: A(x) "es existiert genau ein x, so dass A(x) gilt"

$\forall$ heißt Allquantor, $\exists$ Existenzquantor.

Verneinung von Quantoren:

Es gilt:

$\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg A(x)$

$\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg A(x)$

Logikkalküle

Für Details bezüglich der Einführung eines Logikkalküls (es gibt mehrere äquivalente Möglichkeiten) und der Beziehung zwischen Logikkalkülen und Wahrheitstafeln (Vollständigkeitssätze, 1. und 2. Gödelscher Unvollständigkeitssatz, Turingmaschinen) siehe zum Beispiel Ebbinghaus, Plum, Thomas: Einführung in die mathematische Logik.

2 Mengen

Die grundliegenden Objekte der Mathematik sind Mengen. Dabei setzt man voraus, dass eine Art "Urmenge" existiert, welche eine Sammlung von unendlich vielen Elementen ist.
In den Lehrveranstaltungen zur Mathematik I/II genügt es, von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ als "Urmenge" auszugehen. Eine mathematisch exakte Definition von $\mathbb{N}$ folgt demnächst.
Ausgehend von dieser "Urmenge" können dann durch festgelegte Mengenbildungsregeln weitere Mengen gebildet werden.

Bezeichnungen

$m \in M$ " m ist Element der Menge M "
$m \notin M$ " m ist nicht Element der Menge M "

Mengenbildungsregeln

1. Aussonderungsregel

Ist M_1 eine Menge und A(x) eine Aussage, dann ist $M_2 = \{x \in M_1 : A(x)\}$ eine Menge, d.h. M_2 enthält alle Elemente von M_1, für die A(x) wahr ist.

2. Vereinigungsregel

Sind M_1 und M_2 Mengen, dann ist $M_3 = M_1 \cup M_2 = \{x : x \in M_1 \vee x \in M_2\}$ eine Menge. M_3 heißt dann Vereinigung von M_1 und M_2.

3. Paarmengenregel

Sind M_1 und M_2 Mengen, dann ist $M_3 = \{M_1, M_2\}$ eine Menge. M_3 heißt dann Paarmenge von M_1 und M_2. M_3 enthält die Mengen M_1 und M_2 als Elemente.

4. Gleichheitsregel

Zwei Mengen M und N sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente besitzen.
In der formalen mathematischen Sprache schreibt sich diese Regel folgendermaßen:

$$\forall M \forall N : (\forall x : ((x \in M \to x \in N) \wedge (x \in N \to x \in M)) \to M = N)$$

Eine Menge N heißt Teilmenge von M, in Zeichen $N \subseteq M$, falls gilt:

$$\forall x : x \in N \Rightarrow x \in M.$$

M heißt dann Obermenge von N.
Ist $N \subseteq M$ und $N \neq M$, dann schreiben wir auch $N \subset M$.
In mancher Literatur wird "$\subset$" statt "$\subseteq$" und "$\subsetneqq$" statt "$\subset$"verwendet.

5. Potenzmengenregel
Sei M eine Menge, dann ist $\mathscr{P} = \{N : N \subseteq M\}$ eine Menge, die sogenannte Potenzmenge von M.

Seien $M, N \neq \emptyset$. Eine Zuordnungsvorschrift f, die jedem $x \in M$ genau ein $y = f(x) \in N$ zuordnet, heißt Abbildung oder Funktion.
Kurzschreibweise: $f : M \to N, x \mapsto f(x)$.
M heißt Definitionsbereich von f.
Ist $y = f(x)$, dann heißt y das Bild von x (unter f) und x das Urbild von y.

6. Ersetzungsregel
Sei f eine Funktion und M Teilmenge des Definitionsbereichs von f. Dann ist $f(M) = \{f(x) : x \in M\}$ eine Menge, die sogenannte Bildmenge von M (unter der Funktion f).

Aufgrund der Aussonderungsregel können wir auch für jede Teilmenge Y des Wertebereichs einer Funktion $f: M \to N$ die Menge $f^{-1}(Y) = \{x \in M : f(x) \in Y\}$, die sogenannte Urbildmenge von Y, bilden.

Die Mengenbildungsregeln 1–6 erlauben weitere Mengenbildungen. Für zwei Mengen M_1, M_2 ist zum Beispiel:

a) $M_1 \cap M_2 = \{x : x \in M_1 \wedge x \in M_2\} = \{x \in M_1 : x \in M_2\}$

die Schnittmenge von M_1 und M_2 (bei dieser Mengenbildung wird die Aussonderungsregel angewandt). Ist $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, dann heißen M_1 und M_2 disjunkt.

b) $M_1 \setminus M_2 = \{x : x \in M_1 \wedge x \notin M_2\} = \{x \in M_1 : x \notin M_2\}$

die Differenzmenge von M_1 und M_2. Ist $M_2 \subseteq M_1$, dann heißt $M_1 \setminus M_2$ auch das Komplement von M_2 in M_1, in Zeichen: M_2^c.

c) $M_1 \times M_2 = \{(m_1, m_2) : m_1 \in M_1 \wedge m_2 \in M_2\}$

das kartesische Produkt von M_1 und M_2. Hierbei ist $(m_1, m_2) = \{m_1, \{m_2\}\}$ das sogenannte geordnete Paar von m_1 und m_2. Im Unterschied zur Menge $\{m_1, m_2\} = \{m_2, m_1\}$ ist bei geordneten Paaren die Reihenfolge von m_1 und m_2 entscheidend, d.h. $(m_1, m_2) \neq (m_2, m_1)$, falls $m_1 \neq m_2$ ist. Insbesondere gilt $(m_1, m_2) = (m_1', m_2') \Leftrightarrow m_1 = m_1' \wedge m_2 = m_2'$.

Allgemeiner erhält man für Mengen $M_1, \ldots, M_n$:

a) $\bigcup\limits_{k=1}^{n} M_k = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n = \{x : \exists j \in \{1, \ldots, n\} : x \in M_j\}$

die Vereinigung der Mengen $M_1, \ldots, M_n$.

b) $\bigcap\limits_{k=1}^{n} M_k = M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_n = \{x : \forall j \in \{1, \ldots, n\} : x \in M_j\}$

die Schnittmenge von $M_1, \ldots, M_n$.

c) $\prod\limits_{k=1}^{n} M_k = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n = \{ \underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}_{\text{geordnetes n-Tupel}} : \forall j \in \{1, \ldots, n\} : x_j \in M_j\}$

das kartesische Produkt von $M_1, \ldots, M_n$. Ist $M_1 = M_2 = \cdots = M_n = M$, dann schreibt man auch M^n statt $\underbrace{M \times \cdots \times M}_{n-fach}$.

Rechengesetze für Mengen

Seien L, M, N Mengen, dann gilt:

1. Assoziativgesetz
   (a) $(L \cup M) \cup N = L \cup (M \cup N)$
   (b) $(L \cap M) \cap N = L \cap (M \cap N)$
2. Kommutativgesetz
   (a) $M \cup N = N \cup M$
   (b) $M \cap N = N \cap M$
3. Distributivgesetz
   (a) $L \cup (M \cap N) = (L \cup M) \cap (L \cup N)$
   (b) $L \cap (M \cup N) = (L \cap M) \cup (L \cap N)$
4. De Morgan'sche Regeln
   (a) $L \setminus (M \cup N) = (L \setminus M) \cap (L \setminus N)$
   (b) $L \setminus (M \cap N) = (L \setminus M) \cup (L \setminus N)$

Wir erkennen: $\cup$ bei Mengen entspricht $\vee$ bei Aussagen, $\cap$ bei Mengen entspricht $\wedge$ bei Aussagen und $\setminus$ bei Mengen entspricht $\neg$ bei Aussagen.

Relationen

Seien M_1, M_2 Mengen. Jede Teilmenge $R \subseteq M_1 \times M_2$ heißt (zweistellige, binäre) Relation (zwischen M_1 und M_2). Für $(x,y) \in R$ schreibt man auch xRy.

Sei $f : M_1 \to M_2$ eine Funktion. Dann ist der sogenannte Graph

$$G(f) = \{(x,y) \in M_1 \times M_2 : y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \in M_1 \times M_2\}$$

von f eine Relation. Ist umgekehrt R eine Relation zwischen M_1 und M_2 mit der Eigenschaft

$$\forall x \in M_1 \exists! y \in M_2 : (x,y) \in R,$$

dann ist $R = G(f)$ mit $f : M_1 \to M_2, x \mapsto y$.

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt Äquivalenzrelation (auf M), falls

(i) $\forall a \in M : aRa$ (R ist reflexiv)

(ii) $\forall a,b \in M : aRb \Leftrightarrow bRa$ (R ist symmetrisch)

(iii) $\forall a,b,c \in M : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ (R ist transitiv)

Für Äquivalenzrelationen verwendet man häufig das Zeichen $\sim$ statt R.
Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und $a \in M$. Dann heißt die Menge
$[a] := \{b \in M : b \sim a\}$ die Äquivalenzklasse von a (bzgl. $\sim$).

Axiome der Mengenlehre

Formuliert man die Mengenbildungsregeln 1) - 6) aus 2.1 sowie das Postulat der Existenz einer unendlichen "Urmenge" mathematisch exakt in der formalen mathematischen Sprache, dann erhält man das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem der Mengenlehre.
Dieses Axiomensystem schließt Mengenbildungen aus, die in sich widersprüchlich sind, wie z.B. $\{M : M \notin M\}$.
Ein zusätzliches Axiom der Mengenlehre ist das sogenannte Auswahlaxiom. Es erleichtert viele mathematische Argumentationen, impliziert aber auch überraschende Aussagen wie das Banach-Tarski Paradoxon.
Für Details siehe zum Beispiel Ebbinghaus.

3 Die reellen Zahlen

3.1 Einführung der reellen Zahlen

Möglichkeit 1:
Konstruktion der reellen Zahlen ausgehend von den natürlichen Zahlen:

1. Schritt:
Definition der natürlichen Zahlen durch ein Axiomensystem (Peano-Axiome):
Die natürlichen Zahlen bilden eine Menge $\mathbb{N}$, auf der eine Abbildung $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (Nachfolgerfunktion) definiert ist mit folgenden Eigenschaften:

($\mathbb{N}_1$) $\exists!\ x \in \mathbb{N} : x \notin \nu(\mathbb{N})$. Bezeichnung: $1 := x$

($\mathbb{N}_2$) $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : \nu(n_1) = \nu(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$.

($\mathbb{N}_3$) Induktionsaxiom:
Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ und gilt

(i) $1 \in M$ und

(ii) $n \in M \Rightarrow \nu(n) \in M$,

dann ist $M = \mathbb{N}$.

Man bezeichnet nun: $2 := \nu(1)$, $3 := \nu(2), \ldots$.

Für $m,n \in \mathbb{N}$ sei

$$m+1 := \nu(m), \quad m+(n+1) := \nu(m+n),$$

$$m \cdot 1 := m, \quad m \cdot (n+1) := m \cdot n + m.$$

Aufgrund von $(\mathbb{N}_3)$ sind auf diese Weise $m+n$ und $m \cdot n$ für alle $n,m \in \mathbb{N}$ definiert.
Außerdem definiert man

$$m < n :\Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{N} : m+d = n.$$

Ausgehend von diesen Definitionen von $+, \cdot, <$ können mit Hilfe von $(\mathbb{N}_3)$ alle bekannten Rechengesetze von $\mathbb{N}$ (z.B. Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, Distributivgesetz, Umformungsregeln für Ungleichungen) bewiesen werden.
Alternativ kann in $(\mathbb{N}_1)$ und $(\mathbb{N}_3)$ die 1 durch die 0 ersetzt werden und $1 := \nu(0)$ gesetzt werden. Dann ist $0 \in \mathbb{N}$.
Anderenfalls führt man $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ein, um die 0 einzubeziehen.

2. Schritt:
Konstruktion der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ aus $\mathbb{N}$ durch Bildung geordneter Paare, z.B. $(1,2)$ für $1-2 =: -1$, und Äquivalenzklassenbildung zur Gleichsetzung gleichwertiger Differenzen, z.B. $(1,2) \sim (2,3)$ wegen $1-2 = 2-3$.
Erweiterung der Definitionen von $+, \cdot, <$ auf $\mathbb{Z}$.

3. Schritt:
Konstruktion der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ aus $\mathbb{Z}$ durch Bildung geordneter Paare, z.B. $(1,2)$ für $1:2 =: \frac{1}{2}$, und Äquivalenzklassenbildung zur Gleichsetzung erweiterter oder gekürzter Brüche, z.B. $(2,4) \sim (1,2) \sim (3,6)$ wegen $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$.
Erweiterung der Definitionen von $+, \cdot, <$ auf $\mathbb{Q}$.

4. Schritt:
Konstruktion der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ zum Beispiel mit Hilfe von Intervallschachtelungen zur Definition der irrationalen Zahlen (nicht abbrechende, nicht periodische Dezimalbrüche).
Erweiterung der Definitionen von $+, \cdot, <$ auf $\mathbb{R}$.
Auf der Basis der oben skizzierten Konstruktionen und Definitionen lassen sich alle bekannten Rechengesetze von $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ beweisen.

Für mehr Details siehe Lehrbücher für MathematikstudentInnen, teilweise aber auch Lehrbücher für InformatikstudentInnen.

Möglichkeit 2:
Beschreibung von $\mathbb{R}$ durch Axiome:

Die reellen Zahlen bilden eine Menge $\mathbb{R}$, in der folgende Axiome gelten:

1) die Körperaxiome, siehe 3.2,
2) das Induktionsaxiom, siehe 3.3,
3) die Anordnungsaxiome, siehe 3.4,
4) das Supremumsaxiom, siehe 3.5.

Mit Hilfe der Konstruktionen aus Möglichkeit 1 kann unter Voraussetzung der Existenz von $\mathbb{N}$ bewiesen werden, dass eine (bis auf strukturerhaltende Kopien) eindeutige Menge $\mathbb{R}$ existiert, welche die Axiome 1) - 4) erfüllt. Aus den Axiomen 1) - 4) folgen alle bekannten Rechengesetze von $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$.

Axiom 1 *Auf der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind zwei Verknüpfungen, d.h. Abbildungen von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, nämlich $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation) definiert mit folgenden Eigenschaften:*

(A_1) $\forall a,b,c \in \mathbb{R}:\ (a+b)+c = a+(b+c)$ *(Assoziativität von $+$)*

(A_2) $\forall a,b \in \mathbb{R}:\ a+b = b+a$ *(Kommutativität von $+$)*

(A_3) $\exists!\ x \in \mathbb{R}\forall a \in \mathbb{R}:\ a+x = a$ *(Neutrales Element bzgl. $+$)*
Bezeichnung: $0 := x$.

(A_4) $\forall a \in \mathbb{R}\exists!\ y \in \mathbb{R}:\ a+y = 0$ *(Inverses Element bzgl. $+$)*
Bezeichnung: $-a := y$

(M_1) $\forall a,b,c \in \mathbb{R}:\ (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ *(Assoziativität von $\cdot$)*

(M_2) $\forall a,b \in \mathbb{R}:\ a\cdot b = b\cdot a$ *(Kommutativität von $\cdot$)*

(M_3) $\exists!\ p \in \mathbb{R}\forall a \in \mathbb{R}:\ a\cdot p = a$ *(Neutrales Element bzgl. $\cdot$)*
Bezeichnung: $1 := p$.

(M_4) $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\exists!\ q \in \mathbb{R}:\ a\cdot q = 1$ *(Inverses Element bzgl. $\cdot$)*
Bezeichnung: $a^{-1} := \frac{1}{a} := q$.

(D) $\forall a,b,c \in \mathbb{R}:\ a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ *(Distributivität)*
Hierbei sei Punktrechnung vor Strichrechnung vereinbart, d.h.
$a\cdot b + a\cdot c = (a\cdot b)+(a\cdot c)$.

Definition

a) Eine Menge M mit einer Verknüpfung $*: H*H \to H$ *heißt Halbgruppe, falls gilt*

$$\forall x,y,z \in M: \; x*(y*z) = (x*y)*z,$$

d.h. falls $*$ *assoziativ ist.*

b) Eine Halbgruppe $(M,*)$ *heißt Monoid, falls gilt*

$$\exists e \in M \forall x \in M: \; e*x = x = x*e,$$

d.h. falls ein neutrales Element existiert.

c) Ein Monoid $(G,*)$ *heißt Gruppe, falls gilt*

$$\forall x \in G \exists y \in G. \; y*x = e,$$

d.h. falls ein linksinverses Element zu x *existiert, nämlich y*

d) Eine Gruppe $(A,*)$ *heißt abelsch oder kommutativ, falls gilt*

$$\forall x,y \in A: \; x*y = y*x,$$

d.h. falls $*$ *kommutativ ist.*

Satz 3.1 *Sei $(M,*)$ ein Monoid. Dann gibt es genau ein neutrales Element in M.*

Satz 3.2 *In jeder Gruppe $(G,*)$ gilt:*

(i) $\forall x,y \in G: \; y*x = e \Rightarrow x*y = e$, *d.h. jedes linksinverse Element ist auch rechtsinvers und somit invers (d.h. links- und rechtsinvers).*

(ii) $\forall x \in G \exists! \; y \in G: \; y*x = e = x*y$
Bezeichnung: $x^{-1} := y$

(iii) $\forall a,b \in G \exists! \; x \in G: \; a*x = b$

(iv) $\forall a,b \in G \exists! \; y \in G: \; y*a = b$

(v) $\forall x \in G: \; (x^{-1})^{-1} = x$

(vi) $\forall x,y \in G: \; (x*y)^{-1} = y^{-1}*x^{-1}$

Definition

a) Eine Menge R mit zwei Verknüpfungen $+,\cdot$ heißt Ring, falls gilt:

(i) $(R,+)$ *ist kommutative Gruppe.*

(ii) $(R,\cdot)$ *ist Monoid.*

(iii) $\forall a,b,c\in R:\ (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c \ \wedge\ a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ *(Distributivgesetz)*
Hierbei gilt Punkt vor Strich, d.h. $a\cdot c + b\cdot c = (a\cdot c)+(b\cdot c)$

(iv) $0\neq 1$*, wobei* 0 *das neutrale Element bzgl.* $+$ *und* 1 *das neutrale Element bzgl.* $\cdot$ *bezeichnet.*

b) Ein Ring $(R,+,\cdot)$ *heißt kommutativ, falls* $\cdot$ *kommutativ ist.*

c) Ein Ring $(R,+,\cdot)$ *heißt Körper, falls* $(R\backslash\{0\},\cdot)$ *eine kommutative Gruppe ist.*

Bezeichnungen

$-\ x :=$ Inverses von x bzgl. $+$,
$x-y := x+(-y)$,
$\frac{1}{x} := x^{-1} :=$ Inverses bzgl. $\cdot$,
$\frac{x}{y} := x:y := x\cdot y^{-1}$,
$x^2 := x\cdot x$,
$xy := x\cdot y$.

Mit Hilfe der eben eingeführten Fachbegriffe und wegen der Sätze 3.1 und 3.2 können wir das Axiom 1 erheblich kürzer formulieren:

Axiom 1 *Auf* $\mathbb{R}$ *sind zwei Verknüpfungen* $+$ *und* $\cdot$ *definiert und* $(\mathbb{R},+,\cdot)$ *ein Körper.*

Satz 3.3 *In jedem Ring* $(R,+,\cdot)$ *(und somit auch in jedem Körper, insbesondere in* $(\mathbb{R},+,\cdot)$*) gelten:*

(i) $\forall x \in R: \; 0 \cdot x = 0 = x \cdot 0$

(ii) $\forall x,y \in R: \; (-x)\cdot y = -(x \cdot y)$ *und damit* $(-1)\cdot x = -x$

(iii) $\forall x,y \in R: \; (-x)\cdot(-y) = x \cdot y$

(iv) $\forall x,y,z \in R: \; -x(y-z) = -xy + xz$

Satz 3.4 *In jedem kommutativen Ring* $(R,+,\cdot)$ *(und somit auch in jedem Körper, insbesondere in* $(\mathbb{R},+,\cdot)$*) gelten die binomischen Formeln*

(i) $\forall a,b \in R: \; (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$

(ii) $\forall a,b \in R: \; (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$

(iii) $\forall a,b \in R: \; (a+b)(a-b) = (a^2 - b^2).$

Satz 3.5 *In jedem Körper* $(K,+,\cdot)$ *(und somit auch in* $(\mathbb{R},+,\cdot)$*) gelten:*

(i) $\forall a,b \in K: \; ab = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; a = 0 \,\vee\, b = 0$

(ii) $\forall a \in K \; \forall b,c,d \in K\setminus\{0\}: \; \dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$

(iii) $\forall a,c \in K \; \forall b,d \in K\setminus\{0\}: \; \dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}$

3.3 Das Induktionsaxiom und Folgerungen

Axiom 2 $(\mathbb{R},+,\cdot)$ *enthält eine Teilmenge* $\mathbb{N}$*, welche das folgende Induktionsaxiom erfüllt: Ist* $M \subseteq \mathbb{N}$ *und gilt*

(i) $1 \in M$ *(wobei* 1 *das neutrale Element der Multiplikation in* $\mathbb{R}$ *ist),*

(ii) $n \in M \Rightarrow n+1 \in M$,

dann ist $M = \mathbb{N}$. $\mathbb{N}$ *ist die Menge der natürlichen Zahlen.*

Satz 3.6 (Vollständige Induktion) *Für* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $A(n)$ *eine Aussage. Es gelte*

(i) $A(1)$ *ist wahr. (Induktionsanfang)*

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt: Ist* $A(n)$ *wahr (Induktionsannahme, Induktionsvoraussetzung), dann ist auch* $A(n+1)$ *wahr (Induktionsschritt).*

Dann ist $A(n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *wahr (Induktionsschluss).*

Definition *(Summenzeichen, rekursive Definition)*

$$\sum_{k=1}^{1} a_k \;:=\; a_1$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k \;:=\; \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$$

Satz 3.7 (arithmetische Summenformel)

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Definition *($\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ als Teilmengen von $\mathbb{R}$)*

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_0 &:= \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \mathbb{Z} &:= \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} \quad \textit{(ganze Zahlen)} \\ \mathbb{Q} &:= \left\{\tfrac{n}{m} : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\right\} \quad \textit{(rationale Zahlen)} \end{aligned}$$

Satz 3.8

(i) $(\mathbb{N}, +)$ *ist eine Halbgruppe.*

(ii) $(\mathbb{N}_0, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$ *sind Monoide.*

(iii) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *ist ein kommutativer Ring.*

(iv) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *ist ein Körper.*

Definition *Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei*

$$\begin{aligned} x^0 &:= 1, \\ x^1 &:= x, \\ x^{n+1} &:= x \cdot x^n. \end{aligned}$$

Ist $x \neq 0$, dann sei außerdem $x^{-n} := \dfrac{1}{x^n}$.

Satz 3.9

(i) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall m,n \in \mathbb{Z} : x^{m+n} = x^m \cdot x^n$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall m,n \in \mathbb{Z} : x^{m \cdot n} = (x^m)^n$

(iii) $\forall x,y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall n \in \mathbb{Z} : (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

Satz 3.10

(i) $\forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ **(geometrische Summenformel)**

(ii) $\forall a,b \in \mathbb{R} : (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{n-1-k} \cdot b^k\right) = a^n - b^n$

3.4 Die Anordnungsaxiome und Folgerungen

Axiom 3 $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ *ist ein angeordneter Körper, das heißt, auf dem Körper* $\mathbb{R}$ *ist eine Relation* $<$ *(Kleiner-Relation) definiert, welche die folgenden Anordnungsaxiome erfüllt:*

(O1) $\forall a,b \in \mathbb{R} : a < b \; XOR \; a = b \; XOR \; b < a$ *(Trichotomie)*

(O2) $\forall a,b,c \in \mathbb{R} : a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ *(Transitivität)*

(O3) $\forall a,b,c \in \mathbb{R} : a < b \Rightarrow a + c < b + c$ *(Verträglichkeit mit* $+$*)*

(O4) $\forall a,b,c \in \mathbb{R} : a < b \wedge 0 < c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ *(Verträglichkeit mit Multiplikation mit positiver Zahl)*

Bezeichnungen

$$
\begin{array}{lll}
a > b & :\Leftrightarrow \; b < a & \text{(Größer-Zeichen)} \\
a \leq b & :\Leftrightarrow \; a < b \vee a = b & \text{(Kleiner-Gleich-Zeichen)} \\
a \geq b & :\Leftrightarrow \; a > b \vee a = b & \text{(Größer-Gleich-Zeichen)} \\
\mathbb{R}^+ & := \; \{a \in \mathbb{R} : a > 0\} & \text{(positive reelle Zahlen)} \\
\mathbb{R}_0^+ & := \; \{a \in \mathbb{R} : a \geq 0\} & \text{(nicht negative reelle Zahlen)}
\end{array}
$$

Definition *Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt Ordnungsrelation (auf M), falls gilt:*

(i) $\forall a \in M : aRa$ *(R ist reflexiv)*

(ii) $\forall a, b \in M : aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$ *(R ist antisymmetrsich)*

(iii) $\forall a, b, c \in M : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ *(R ist transitiv)*

Satz 3.11 *Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten:*

(1) $$a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$$
$$a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$$

(2) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$ *(insbesondere $1 = 1^2 > 0$)*

(3) $$a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$$
$$a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$$

(4) $$(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$$

(5) $$0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

Satz 3.12 (Bernoulli-Ungleichung) *Für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$(1+x)^n \geq 1+n\cdot x$$

Definition *(Intervalle)*

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad \textit{(abgeschlossenes Intervall)}$$
$$]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad \textit{(offenes Intervall)}$$
$$[a,b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad \textit{(rechts halboffenes Intervall)}$$
$$[a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

Analog definiert man $]a,b]$, $]-\infty,b]$, $]a,\infty[$, $]-\infty,\infty[= \mathbb{R}$

Definition *(Betrag von x)*

$$|x| := \begin{cases} x, & \textit{falls } x \geq 0 \\ -x, & \textit{falls } x < 0 \end{cases}$$

Satz 3.13 *Für alle* $a, b \in \mathbb{R}$ *gelten:*

(i) $|a| \geq 0 \wedge (|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0)$

(ii) $|a| \geq a \wedge (|a| = a \Leftrightarrow a \geq 0)$

(iii) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(iv) $|a + b| \leq |a| + |b|$ **(Dreiecksungleichung)**

(v) $||a| - |b|| \leq |a - b|$ **(Dreiecksungleichung nach unten)**

(vi) $|a \cdot b| \leq \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 + b^2\right)$

Satz 3.14 $\forall a, b \in \mathbb{Q} : a < b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Q} : a < c < b$

Definition *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.*

a) $a \in \mathbb{R}$ *heißt obere Schranke, falls* $\forall x \in M : x \leq a$.
$a \in \mathbb{R}$ *heißt untere Schranke, falls* $\forall x \in M : x \geq a$.

b) M *heißt nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, falls* M *eine (und damit unendlich viele) obere (bzw. untere) Schranken besitzt.* M *heißt beschränkt, falls* M *nach oben und nach unten beschränkt ist.*

c) $a \in \mathbb{R}$ *heißt Maximum (bzw. Minimum) von* M, *falls* $a \in M \wedge \forall x \in M : x \leq a$ *(bzw.* $x \geq a$*).*
Bezeichnung: $a = \max M$ *(bzw.* $a = \min M$*).*

d) $a \in \mathbb{R}$ *heißt Supremum von* M, *falls* a *die kleinste obere Schranke von* M *ist, d.h.*

$$(\forall x \in M : x \leq a) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \; \exists m \in M : a - \varepsilon < m \leq a).$$

$a \in \mathbb{R}$ *heißt Infimum von* M, *falls* a *die größte untere Schranke von* M *ist.*
Bezeichnung: $a = \sup M$ *(bzw.* $a = \inf M$*).*

Bemerkung
Ein Maximum ist gleichzeitig Supremum, ein Minimum gleichzeitig Infimum, aber nicht umgekehrt.

Axiom 4 *Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.*

Satz 3.15 *Jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum.*

Satz 3.16 $\mathbb{R}$ *ist ein archimedisch geordneter Körper, d.h. es gilt*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \; \exists n \in \mathbb{N} : n > x. \tag{A}$$

Korollar 3.17

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Satz 3.18 (Existenz der n-ten Wurzel)

$$\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \; \forall n \in \mathbb{N} \; \exists! x \in \mathbb{R}_0^+ : x^n = a.$$

Bezeichnung: $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

Definition *Für* $a \in \mathbb{R}^+$ *und* $m, n \in \mathbb{N}$ *sei*

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{-\frac{m}{n}} := \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Satz 3.19 *i)* $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ \forall r, s \in \mathbb{Q} : x^{r+s} = x^r \cdot x^s$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ \forall r, s \in \mathbb{Q} : x^{r \cdot s} = (x^r)^s$

iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \ \forall r \in \mathbb{Q} : (x \cdot y)^r = x^r \cdot y^r$

Satz 3.20 $\sqrt{2}$ *ist irrational, d.h.* $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Definition

a) Sei $n \in \mathbb{Z}$. *Die Zahl* $m \in \mathbb{N}$ *heißt Teiler von* n *(Bezeichnung:* $m|n$*), falls*

$$\exists k \in \mathbb{Z} : n = km.$$

n *heißt dann teilbar durch* m *und* m *teilt* n.

b) Die Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ *heißen teilerfremd, falls kein* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ *existiert mit* $k|p$ *und* $k|q$.

c) Die Zahl $n \in \mathbb{Z}$ *heißt gerade, falls* $2|n$. *Anderenfalls heißt* n *ungerade.*

Satz 3.21 *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$n \text{ gerade} \iff n^2 \text{ gerade}.$$

Satz 3.22 *Es seien $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ b, c \in \mathbb{R}$ und $b^2 \geq 4ac$. Dann gilt:*

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

4 Zahlentheorie

4.1 Kombinatorik

Definition *Es seien $M \subseteq \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N}$.*

a) *Jedes r-Tupel $(a_1, \ldots, a_r) \in M^r$ heißt eine r-Permutation (aus M) mit Wiederholung.*

   Anwendungen:

   1. *Ziehen von r Kugeln aus einer Urne mit Zurücklegen. Die Reihenfolge der Ziehung ist von Bedeutung.*
   2. *Verteilen von r unterscheidbaren Kugeln auf so viele Zellen, wie M Elemente hat, mit Mehrfachbesetzung von Zellen.*

b) *Jedes r-Tupel $(a_1, \ldots, a_r) \in M^r$ mit $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$ heißt eine r-Permutation ohne Wiederholung.*

   Anwendungen:

   1. *Ziehen ohne Zurücklegen, Reihenfolge ist von Bedeutung.*
   2. *Verteilen ohne Mehrfachbesetzung, Kugeln sind unterscheidbar.*

c) Jede Teilmenge von M mit r Elementen $\{a_1, \ldots, a_r\} \in \mathscr{P}(M)$ heißt r-Kombination (aus M) ohne Wiederholung.

Anwendungen:

1. Ziehen ohne Zurücklegen, Reihenfolge ist egal.
2. Verteilen ohne Mehrfachbesetzung, Kugeln sind ununterscheidbar.

d) Jedes r-Tupel $(a_1, \ldots, a_r) \in M^r$ mit $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_r$ heißt eine r-Kombination mit Wiederholung.

Anwendungen:

1. Ziehen mit Zurücklegen, die Reihenfolge ist egal.
2. Verteilen mit Mehrfachbesetzung, Kugeln sind ununterscheidbar.

Definition

a) (Produktzeichen)

$$\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1, \quad \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot a_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad also \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n,$$

$$\prod_{k=0}^{n} a_k := \prod_{k=1}^{n+1} a_{k-1}.$$

b) (Fakultät)

$$0! := 1, \quad n! := \prod_{k=1}^{n} k, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad also\ n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

c) (Binomialkoeffizient)

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \qquad \binom{\alpha}{k+1} := \frac{\alpha - k}{k+1}\binom{\alpha}{k}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad also$$

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!}, \ falls\ k \in \mathbb{N},$$

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}, \ falls\ n, k \in \mathbb{N}_0\ und\ k \leq n.$$

Satz 4.1 *Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ mit n Elementen und $r \in \mathbb{N}$ mit $r \leq n$. Dann gibt es genau*

a) n^r mögliche r-Permutationen mit Wiederholung,

b) $\binom{n}{r} r! = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)$ mögliche r-Permutationen ohne Wiederholung, insbesondere $n!$ mögliche n-Permutationen ohne Wiederholung.

c) $\binom{n}{r}$ mögliche r-Kombinationen ohne Wiederholung.

d) $\binom{n+r-1}{r}$ mögliche r-Kombinationen mit Wiederholung.

Satz 4.2 *Es seien $n,k \in \mathbb{N}_0,\ k \le n$ und $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

a) $\binom{n}{0} = 1$

b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

c) $\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}$

d) (Binomischer Satz)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Bemerkung

Gemäß Satz 4.2 ergeben sich die Werte von $\binom{n}{k}$ aus dem Pascalschen Dreieck:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Somit gilt z. B. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Korollar 4.3

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Bemerkung

Wegen Satz 4.1 $c)$ folgt aus Korollar 4.3: Die Potenzmenge einer n-elementigen Menge hat genau 2^n Elemente.
Diese Aussage kann allerdings auch direkt mit vollständiger Induktion bewiesen werden.

Definition

a) Für $a, b \in \mathbb{Z},\ (a,b) \neq (0,0)$ heißt

$$\mathrm{ggT}(a,b) := \max\{d \in \mathbb{N} : d|a \wedge d|b\}$$

der größte gemeinsame Teiler von a und b.

b) Für $m, n \in \mathbb{N}$ heißt

$$\mathrm{kgV}(m,n) := \min\{q \in \mathbb{N} : m|q \wedge n|q\}$$

das kleinste gemeinsame Vielfache von m und n.

Satz 4.4 (Teilen mit Rest) *Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{N}_0$ mit*

$$n = qm + r \quad \wedge \quad r \leq m - 1.$$

Dabei gilt $\mathrm{ggT}(n,m) = \mathrm{ggT}(m,r)$.

Hilfssatz 4.5

$$\forall n, m, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\ \forall d \in \mathbb{N} : d|n \wedge d|m \ \Rightarrow\ d|\alpha n + \beta m.$$

Satz 4.6 (Euklidischer Algorithmus zur Berechnung des ggTs) *Seien* $n, m \in \mathbb{N}$ *mit* $n > m$. *Dann existieren eindeutig bestimmte Zahlen N,* $q_1, \ldots, q_{N+1}$, $r_1, \ldots, r_N \in \mathbb{N}$ *mit*

$$
\begin{aligned}
&n = q_1 m + r_1 \wedge r_1 \leq m - 1, \\
&m = q_2 r_1 + r_2 \wedge r_2 \leq r_1 - 1 \leq m - 2, \\
&r_1 = q_3 r_2 + r_3 \wedge r_3 \leq r_2 - 1, \\
&\vdots \\
&r_{N-2} = q_N r_{N-1} + r_N \wedge r_N \leq r_{N-1} - 1, \\
&r_{N-1} = q_{N+1} r_N + 0,
\end{aligned}
$$

und es gilt $r_N =$*ggT*(m, n).

Definition $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *heißt Primzahl, falls* 1 *und* p *die einzigen Teiler von* p *sind.*

Hilfssatz 4.7 *Seien* $m, n \in \mathbb{N}$ *und* p *eine Primzahl. Dann gilt:* $p|mn \Rightarrow p|m \vee p|n$.

Satz 4.8 (Fundamentalsatz der Arithmetik) *Jede natürliche Zahl* $n \geq 2$ *lässt sich als Produkt von Primzahlen darstellen, wobei die Darstellung bis auf die Reihenfolge der Primfaktoren eindeutig ist.*

Korollar 4.9 *Sei* $n = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}$ *und* $m = p_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k}$, *wobei* $p_1, \ldots, p_k$ *Primzahlen und* $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}_0$ *seien. Dann gilt:*

$$ggT(n,m) = p_1^{\min\{r_1,s_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min\{r_k,s_k\}},$$
$$kgV(n,m) = p_1^{\max\{r_1,s_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{r_k,s_k\}}.$$

Satz 4.10 (Satz von Euklid) *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Bemerkung
Anwendungen von Teilbarkeit und Primzahlen gilt es zum Beispiel beim modularen Rechnen und in der Kryptographie.

4.3 Stellenwertsysteme

Üblicherweise stellen wir natürliche Zahlen mit Hilfe der zehn Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ dar, zum Beispiel $108 = 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$. Das geht auch mit weniger oder mehr Ziffern.

Definition *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Die Darstellung*

$$n = (a_N a_{N-1} a_{N-2} \ldots a_0)_g := \sum_{j=0}^{N} a_j g^j$$

mit $N \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_N \in Z_g$, wobei $Z_g$eine Menge mit g Elementen ist, heißt g-adische Entwicklung von n. g heißt Ziffernbasis und die Elemente aus Z_g heißen Ziffern.

Satz 4.11 *Sei $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ vorgegeben. Dann besitzt jedes $n \in \mathbb{N}$ eine eindeutige g-adische Entwicklung, d.h. es existieren eindeutig bestimmte $N \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_N \in Z_g$, so dass $n = (a_N, a_{N-1}, \ldots, a_0)_g \wedge a \neq 0$ gilt.*

Die g-adische Entwicklung kann zum Beispiel folgendermaßen berechnet werden:

1. Schritt: Bestimme $N \in \mathbb{N}$ mit $g^N \leq n < g^{N+1}$.
2. Schritt: Teile n durch g^n mit Rest, d.h. bestimme $n = a_N - g^N + r_N$ mit $0 \leq r_N < g^N$ und $0 < a_N \leq g-1$.
3. Schritt: Teile r_N durch g^{N-1} mit Rest, d.h. bestimme

$$\begin{aligned} r_N &= a_{N-1}g^{N-1} + r_{N-1} \quad \text{mit } 0 \leq r_{N-1} < g^{N-1}, 0 \leq a_{N-1} \leq g-1, \\ &\vdots \\ r_2 &= a_1 g^1 + r_1 \quad \text{mit } 0 \leq r_1 < g, 0 \leq a_1 \leq g-1, \\ r_1 &= a_0 g^0 = a_0. \end{aligned}$$

Dann ist $n = (a_{N,}a_{N-1}, \ldots, a_0)_g$.

5 Reelle Funktionen

5.1 Allgemeine Grundbegriffe

Definition

a) Zwei Funktionen $f_1 : M_1 \to N_1$ und $f_2 : M_2 \to N_2$ heißen gleich, falls $M_1 = M_2$ und $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in M_1$ gilt.

b) Seien $f_1 : M_1 \to N_1$ und $f_2 : M_2 \to N_2$ zwei Funktionen, wobei $M_1 \subseteq M_2$ und $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in M_1$ gilt. Dann heißt f_2 die Fortsetzung von f_1 auf M_2 und f_1 die Einschränkung von f_2 auf M_1, in Zeichen : $f_1 = f_2\,|_{M_1}$.

Definition *Eine Funktion $f : M \to N$ heißt*

a) injektiv, falls $\forall x, y \in M : \; f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y$

b) surjektiv, falls $\forall y \in N \; \exists x \in M : \; y = f(x)$

c) bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

Definition *Seien $f : A \to B$ und $g : B' \to C$ Funktionen, wobei $B \subseteq B'$ sei. Dann heißt*

$$g \circ f : A \to C, x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

Verkettung oder Hintereinanderausführung von f und g.

Bemerkung
Die Verkettung von Funktionen ist assoziativ, denn es gilt

$$\begin{aligned}(h\circ g)\circ f &= (h\circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g\circ f)(x)) \\ &= h\circ(g\circ f)\ ,\end{aligned}$$

aber im Allgemeinen nicht kommutativ.

Satz 5.1 *Ist eine Funktion $f:M\to N$ bijektiv, dann existiert genau eine Funktion $f^{-1}:N\to M$, die sogenannte Umkehrfunktion oder inverse Abbildung von f, mit*

$$f^{-1}\circ f = Id_M \quad\wedge\quad f\circ f^{-1} = Id_N,$$

wobei $Id_M : M\to M, x\mapsto x$, $Id_N : N\to N, x\mapsto x$ die sogenannten identischen Abbildungen oder Identitäten auf M bzw. N sind.

Definition *Unter einer Menge $\{f,g,\ldots\}$ von Funktionen versteht man die Menge ihrer Funktionsgraphen, wobei jede Funktion mit ihrem Graph identifiziert wird, d.h. $\{f,g,\ldots\} := \{G(f),G(g),\ldots\}$.*

Satz 5.2 *Sei S_M die Menge aller bijektiven Abbildungen (Funktionen) auf einer nichtleeren Menge M. Dann definiert die Verkettung $\circ$ eine Verknüpfung auf S_M und $(S_M,\circ)$ ist eine Gruppe.*

Definition *Seien $M \neq \emptyset$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f, g : M \to \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen. Dann definiert man $f+g, \alpha g$ und fg durch*

$$\begin{aligned} f+g : M \to \mathbb{R},\ x &\mapsto f(x)+g(x), \\ \alpha f : M \to \mathbb{R},\ x &\mapsto \alpha f(x), \\ fg : M \to \mathbb{R},\ x &\mapsto f(x) \cdot g(x). \end{aligned}$$

Definition *Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Dann heißt f*

a) monoton steigend, falls $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$,

b) streng monoton steigend, falls $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$,

c) monoton fallend, falls $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$,

d) streng monoton fallend, falls $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$,

Bemerkung
Streng monoton steigende und streng monoton fallende Funktionen sind injektiv.

5.2 Polynomfunktionen

Definition

a) *Sei* $(R, +, \cdot)$ *ein kommutativer Ring. Ein Term der Form* $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ *mit* $a_k \in R$ *für* $k = 0, \ldots, n$ *heißt Polynom und eine Funktion* $p : R \to R,\ x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ *heißt Polynomfunktion.*

b) *Ist* $a_n \neq 0$*, dann heißt n der Grad des Polynoms. Sind alle Koeffizienten* $a_k = 0$*, dann heißt das Polynom Nullpolynom und sein Grad wird gleich -1 gesetzt. Polynome vom Grad* < 1 *heißen konstant, vom Grad 1 linear und vom Grad 2 quadratisch.*

c) *Gilt* $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$*, dann heißt das Polynom reell und die zugehörige Polynomfunktion ganzrationale reelle Funktion oder reelle Polynomfunktion.*

Satz 5.3 (Koeffizientenvergleich) *Seien* $a_0, \ldots a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ *mit* $a_n, b_m \neq 0$,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ und } q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k.$$

Gilt $p(x) = q(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$, *dann folgt* $m = n$ *und* $a_k = b_k$ *für alle* $k = 0, \ldots, n$.

Aus diesem Satz folgt, dass die zugehörigen Polynomfunktionen zweier verschiedener reeller Polynome, d.h. zweier reeller Polynome mit verschiedenen Koeffizienten, nicht gleich sein können. Daher werden wir reelle Polynome mit reellen Polynomfunktionen identifizieren und zu reellen Polynomfunktionen auch reelle Polynome sagen. Sind dagegen die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m$ Elemente eines endlichen Körpers, dann gilt die Behauptung des Satzes 5.3 nicht und wir müssen zwischen Polynomen und Polynomfunktionen unterscheiden.

Satz 5.4 *Seien* p,q *reelle Polynome mit* $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k,\ n > m$ *und seien* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
(\alpha p + \beta q)(x) &= \alpha a_0 + \beta b_0 + (\alpha a_1 + \beta b_1)x + \ldots + (\alpha a_m + \beta b_m)x^m + \ldots + \alpha a_n x^n\ , \\
(p \cdot q)(x) &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + \ldots + a_n b_m x^{n+m} \\
&= \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k \\
\textit{mit } c_k &= \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\ , \textit{ falls man } \ a_{n+1} = \ldots = a_{n+m} := 0 \textit{ und} \\
&\qquad\qquad b_{m+1} = \ldots = b_{m+n} := 0 \textit{ setzt.}
\end{aligned}$$

Die Menge $\mathbb{R}[x]$ *aller reellen Polynome bildet mit den Verknüpfungen* $+$ *und* $\cdot$ *einen kommutativen Ring.*
Dabei gilt für alle $p \neq 0$ *und* $q \neq 0$ *:*
$Grad(p+q) \leq max\{Grad(p), Grad(q)\}$ *mit Gleichheit für* $Grad(p) \neq Grad(q)$
und $Grad(p \cdot q) = Grad(p) + Grad(q)$*.*

Definition

a) Ein Polynom p_2 heißt Teiler eines Polynoms p_1 (Bezeichnung $p_2 \mid p_1$), falls ein Polynom q existiert mit $p_1 = q \cdot p_2$.

b) Zwei Polynome p_1, p_2 heißen teilerfremd, falls kein Polynom p mit $Grad(p) \geq 1$ existiert mit $p \mid p_1$ und $p \mid p_2$.

c) Für zwei Polynome a, b, wobei $(a,b) \neq (0,0)$, heißt ein Polynom d ein größter gemeinsamer Teiler von a und b (Bezeichnung $d \in ggT(a,b)$), falls

$$\begin{aligned} &(i) \;\; d \mid a \;\wedge\; d \mid b \\ &(ii) \;\; q \mid a \;\wedge\; q \mid b \;\Rightarrow\; Grad(q) \leq Grad(d). \end{aligned}$$

d) Ein Polynom p mit $Grad(p) \geq 1$ heißt Primpolynom, falls gilt

$$p = p_1 \cdot p_2 \;\;\Rightarrow\;\; Grad(p_1) = 0 \;\vee\; Grad(p_2) = 0.$$

Satz 5.5 *a) Seien* p_1, p_2 *reelle Polynome mit* $Grad(p_1) \geq Grad(p_2) \geq 1$*. Dann gibt es eindeutig bestimmte reelle Polynome* q, r *mit*

$$p_1 = qp_2 + r \quad \wedge \quad Grad(r) < Grad(p_1)$$

Dabei gilt $ggT(p_1, p_2) = ggT(p_2, r)$*.*

b) Zu je zwei reellen Polynomen a, b *mit* $(a, b) \neq (0, 0)$ *gibt es größte gemeinsame Teiler. Aus* $d_1, d_2 \in ggT(a, b)$ *folgt* $d_1 = cd_2$ *für ein* $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*. Die größten gemeinsamen Teiler* $ggT(a, b)$ *können mit Hilfe des euklidischen Algorithmus (mit reellen Polynomen statt mit natürlichen Zahlen) berechnet werden.*

Bemerkung
Das Teilen von reellen Polynomen kann man mit Hilfe des Verfahrens der Polynomdivision durchführen.

Satz 5.6 *Jedes reelle Polynom vom* $Grad \geq 1$ *lässt sich als Produkt von Primpolynomen darstellen, wobei die Darstellung bis auf die Reihenfolge der Primfaktoren eindeutig ist.*

Definition *Sei p ein Polynom. λ heißt Nullstelle von p, falls $p(\lambda) = 0$ ist.*

Satz 5.7 *Sei p ein reelles Polynom vom $Grad \geq 1$. Dann gilt :*

$$\lambda \text{ ist Nullstelle von } p \ \Leftrightarrow \ x - \lambda \ \text{ ist Teiler von } p$$

Korollar 5.8 *Jedes reelle Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat höchstens n verschiedene Nullstellen.*

Definition *λ heißt k-fache Nullstelle eines Polynoms p oder Nullstelle mit Vielfachheit k, falls*

$$p(x) = (x - \lambda)^k p_1(x) \ \text{ mit } p_1(\lambda) \neq 0$$

Satz 5.9 *Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Ist $x = \dfrac{a}{b}$ Nullstelle von p, sind $a, b \in \mathbb{Z}$ und sind a, b teilerfremd, dann gilt $a \mid a_0$ und $b \mid a_n$.*

Definition *Seien p,q reelle Polynome. Eine Funktion* $f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{p(x)}{q(x)}$ *mit* $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ *heißt (gebrochen-)rationale reelle Funktion.*

Bemerkung
Ist λ eine k-fache Nullstelle von q und eine m-fache Nullstelle von p mit $m \geq k$, dann existieren reelle Polynome p_1, q_1, so dass $\tilde{f} : \tilde{D} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{p_1(x)}{q_1(x)}$ mit $\tilde{D} = D \cup \{\lambda\}$ eine Fortsetzung von f ist.

Bemerkung
Die Berechnung von Funktionswerten von $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ an einer Stelle $x = x_0$ lässt sich in vielen Fällen effizienter durchführen, wenn man $p(x)$ in der Form

$$p(x) \ = \ (((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0$$

schreibt und dann x_0 einsetzt. Dieses Rechenverfahren nennt man Horner-Schema. Beim Horner-Schema benötigt man zur Berechnung von $p(x_0)$ nur n Multiplikationen anstatt $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Satz 5.10 *Zu $n+1$ verschiedenen Stützstellen $x_0,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$ mit zugehörigen Funktionswerten $y_0,\ldots,y_n \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein reelles Polynom p mit $Grad(p) \leq n$ und $p(x_k) = y_k$ für $k = 0,\ldots,n$. Dabei gilt:*

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x) \quad \textit{mit} \\ L_k(x) &= \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{k-1})\cdot(x-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_k-x_{k-1})\cdot(x_k-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x_k-x_n)} \end{aligned}$$

5.3 Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen setzen geometrische Größen wie Winkelmaße und Streckenlängen zueinander in Beziehung. Für die Einführung von trigonometrischen Funktionen benötigen wir einige Vorbereitungen.

Um geometrische Objekte (Punkte, Strecken, Geraden, Ebenen, Kreise, ...) mathematisch exakt zu definieren, stellen wir uns die geometrischen Objekte in einem Koordinatensystem vor und definieren sie mathematisch durch Angabe ihrer Koordinaten. Als Erstes definieren wir:

Definition *Ein Punkt auf einer Geraden ist eine Zahl $x \in \mathbb{R}$. Ein Punkt in einer Ebene ist ein geordnetes Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ein Punkt im (dreidimensionalen) Raum ist ein geordnetes 3-Tupel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.*

Alle anderen geometrischen Objekte definieren wir als Punktmengen, also als Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.
Da man ein und dieselbe Punktmenge in Abhängigkeit von den verwendeten mathematischen Mitteln (z.B. Funktionen, Vektoren, ...) auf verschiedene Weise beschreiben kann, gibt es mehrere äquivalente Definitionen für geometrische Objekte.

Definition *Geraden in einer Ebene sind entweder Graphen von reellen Polynomfunktionen der Form* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$ *oder Relationen der Form* $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = c\}$ *mit* $c \in \mathbb{R}$.

Auf der Basis dieser Definition kann man dann geometrische Eigenschaften von Punkten und Geraden in einer Ebene beweisen, zum Beispiel:

Zu je zwei Punkten $P = (x_0, y_0)$ *und* $Q = (x_1, y_1)$ *mit* $P \neq Q$ *gibt es genau eine Gerade* g *mit* $P, Q \in g$. *Die Gerade* g *kann explizit angegeben werden.*

Im Falle von $x_0 \neq x_1$ folgt dies unmittelbar aus Satz 5.10. Gilt $x_0 = x_1$, dann ist $g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_0\}$.

Die *Strecke* PQ zwischen zwei verschiedenen Punkten P und Q können wir als Teilmenge der Geraden g, auf der P und Q liegen, definieren. Ist beispielsweise $P = (0, 0)$ und $Q = (1, 2)$, dann ist $PQ := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\}$ mit $f(x) = 2x$.

Die *Streckenlänge* $|PQ|$ einer Strecke zwischen den Punkten $P = (x_0, y_0)$ und $Q = (x_1, y_1)$ können wir definieren durch

$$|PQ| := \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Hierbei gehen wir implizit von einem kartesischen Koordinatensystem aus. Alternativ kann man Streckenlängen auch auf eine abstraktere Weise definieren und dann den Satz des Pythagoras beweisen, aus dem schließlich die obige Formel für die Streckenlänge folgt.

Definition *Der Kreis $K_r(M)$ mit Mittelpunkt $M = (x_0, y_0)$ und Radius r ist definiert durch*

$$K_r(M) := \{X \in \mathbb{R}^2 : |MX| = r\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\}.$$

Der Kreis $K_1(O)$ um den Ursprung $O = (0,0)$ mit Radius 1 wird auch Einheitskreis oder Einheitssphäre genannt und mit S^1 bezeichnet.

Man kann Kreise auch mit Hilfe von Vereinigungen von Funktionsgraphen beschreiben, zum Beispiel $S^1 = \{(x, \sqrt{1-x^2}) : x \in [-1,1]\} \cup \{(x, -\sqrt{1-x^2}) : x \in [-1,1]\}$.

Unter Verwendung dieser Darstellung kann man dann beispielsweise den *Kreisbogen* $\overset{\frown}{PQ}$, der den Punkt $P = (1,0)$ mit dem Punkt $Q = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$ durch Durchlaufen des Einheitskreises gegen den Uhrzeigersinn verbindet, definieren durch $\{(x, \sqrt{1-x^2}) : x \in [-1,1]\} \cup \{(x, -\sqrt{1-x^2}) : x \in [-1, -\frac{1}{2}]\}$.

Die *Länge eines Kreisbogens* $\overset{\frown}{AB}$ kann man definieren durch das Supremum der Längen aller möglichen Polygonzüge (aneinandergesetzte Strecken) mit Anfangspunkt A, Endpunkt B und Eckpunkten auf $\overset{\frown}{AB}$. Dieses Supremum kann dann mit Hilfe der Integralrechnung berechnet werden. Für jeden Halbkreis mit Radius 1 kommt als Länge die sogenannte Kreiszahl π heraus. π ist eine irrationale Zahl und es gilt $\pi = 3,141592653589793\ldots$.

Den *Winkel* zwischen zwei Punkten $A, B \in S^1$ bzw. zwischen den Strecken OA und OB können wir mit einem Kreisbogen auf dem Einheitskreis mit Anfangspunkt A und Endpunkt B identifizieren. Wird dabei A mit B gegen Uhrzeigersinn verbunden, nennen wir den Winkel positiv orientiert, wird A mit B im Uhrzeigersinn verbunden, heißt der Winkel negativ orientiert.

Das *Bogenmaß* eines positiv orientierten Winkels definieren wir durch die Länge des zugehörigen Kreisbogens, das Bogenmaß eines negativ orientierten Winkels durch das (-1)-fache der Länge des zugehörigen Kreisbogens. Das *Gradmaß* eines Winkels in der Maßeinheit $^\circ$ (Grad) ist dann definiert durch $(\text{Bogenmaß} : \pi) \cdot 180^\circ$.

Definition *Sei $\varphi \in]-2\pi, 2\pi[$ das Bogenmaß eines Winkels zwischen $(1,0)$ und $(x,y) \in S^1$. Dann sei*

$$\sin\varphi := y \quad (\text{Sinus von } \varphi),$$

$$\cos\varphi := x \quad (\text{Kosinus von } \varphi)$$

sowie

$$\sin(\varphi + 2k\pi) := \sin\varphi, \qquad \cos(\varphi + 2k\pi) := \cos\varphi$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Außerdem sei

$$\tan\varphi := \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \quad (\text{Tangens von } \varphi), \qquad falls\ \cos\varphi \neq 0.$$

Eigenschaften von Sinus, Kosinus und Tangens:

a) Es gilt

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\varphi$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

b) Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi, \qquad \cos(-\varphi) = \cos\varphi$$
$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - \varphi) = \sin(\tfrac{\pi}{2} + \varphi), \qquad \cos(\tfrac{\pi}{2} - \varphi) = -\cos(\tfrac{\pi}{2} + \varphi).$$

c) Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi := (\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1,$$
$$\cos\varphi = \sin(\tfrac{\pi}{2} + \varphi).$$

d) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelten die Additionstheoreme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

e) Für $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ gelten die Abschätzungen

$$1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 \leq \cos\varphi \leq 1,$$
$$\cos\varphi \cdot |\varphi| \leq |\sin\varphi| \leq |\varphi|.$$

f) Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $\cos\varphi \neq 0$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\tan(\varphi + k\pi) = \tan\varphi.$$

g) $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1], x \mapsto \sin x$ ist bijektiv. Die zugehörige Umkehrfunktion heißt $\arcsin$ (Arkussinus).

h) $\cos|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1], x \mapsto \cos x$ ist bijektiv. Die zugehörige Umkehrfunktion heißt $\arccos$ (Arkuscosinus).

i) $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}, x \mapsto \tan x$ ist bijektiv. Die zugehörige Umkehrfunktion heißt $\arctan$ (Arkustangens).

Die obigen Eigenschaften kann man unter Ausnutzung elementargeometrischer Argumente, welche man mit Hilfe von Koordinatenmengen mathematisch exakt formulieren kann, beweisen. Diese Vorgehensweise ist allerdings ziemlich aufwendig. Daher findet man in der Literatur meistens eine alternative, äquivalente Definition der trigonometrischen Funktionen, welche mit Begriffen der Analysis (unendliche Reihen) auskommt und keinen Rückgriff auf die Geometrie benötigt. Diese Definition werden wir später behandeln. Auf der Basis dieser Definition können die obigen Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen dann eleganter und nur mit Mitteln der Analysis bewiesen werden.

Bemerkung

Geometrische Objekte kann man alternativ zu den in diesem Abschnitt diskutierten Definitionen mit Hilfe von Koordinatenmengen auch durch ein Axiomensystem definieren (siehe Hilbert: Grundlagen der Geometrie) und dann zeigen, dass dieses Axiomensystem (abgesehen von strukturerhaltenden Kopien) alleine von den oben definierten Koordinatenmengen erfüllt wird.

6 Komplexe Zahlen

Gesucht ist ein Körper $(\mathbb{C},+,\cdot)$ mit $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ und einer Zahl $i\in\mathbb{C}$ mit $i^2=-1$.

Ein solcher Körper müsste auch Elemente der Form $x+iy=x+i\cdot y$ für beliebige $x,y\in\mathbb{R}$ haben und es müsste gelten:

(1) $\forall\, x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}:$

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

(2) $\forall\, x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}:$

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=x_1\cdot x_2+i(x_1y_2+x_2y_1)+i^2y_1y_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

Frage: Lässt sich ein solcher Körper widerspruchsfrei konstruieren?

Definition *Sei* $\mathbb{C}:=\mathbb{R}^2$ *mit den Verknüpfungen*

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2):=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2):=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)$$

Die Elemente von $\mathbb{C}$ *heißen komplexe Zahlen.*

Satz 6.1 *$(\mathbb{C},+,\cdot)$ ist ein Körper und es gilt $(0,1)^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$.*

Satz 6.2 *Sei $E:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, x\mapsto(x,0)$. Dann ist E injektiv und es gilt:*

$$E(x)+E(y)=E(x+y)\,,\quad E(0)=E(0,0)\,,$$

$$E(x)+E(y)=E(x\cdot y)\,,\quad E(1)=E(1,0)\,.$$

Somit macht es Sinn, die folgende vereinfachende Notation einzuführen. Sei

$$x := (x,0),$$

$$i := (0,1).$$

Dann gilt:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}:\ (x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)\cdot(y,0)=x+iy$$

Daher gilt $\mathbb{C}=\{x+iy : x,y\in\mathbb{R}\}$, und $+,\cdot$ sind durch $(1),(2)$ eindeutig als Verknüpfungen auf $\mathbb{C}$ definiert. Außerdem gilt $i^2=-1$.

Schreibt man die komplexen Zahlen in der Form $x+iy$ und beachtet, dass $(\mathbb{C},+,\cdot)$ ein Körper ist und $i^2=-1$ gilt, dann kann man mit komplexen Zahlen nach denselben algebraischen Regeln rechnen wie man es von den reellen Zahlen gewohnt ist. Insbesondere gelten die Sätze 3.3 bis 3.10 sowie der binomische Satz 4.2 d) auch in $\mathbb{C}$, denn sie folgen aus den Körperaxiomen.

Bemerkung
Die kleiner-Relation $<$ kann nicht von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden, so dass die Anordnungsaxiome (O1) bis (O4) auf $\mathbb{C}$ gelten. Denn dann würde wie in 3.11(2) folgen, dass $i^2>0$ ist, was ein Widerspruch zu $i^2=-1<0$ wäre.

Definition *Sei $z=x+iy\in\mathbb{C}$ mit $x,y\in\mathbb{R}$. Dann heißt:*

(i) $Re\,z:=x$ der Realteil von z,

(ii) $Im\,z:=y$ der Imaginärteil von z,

(iii) $\overline{z}:x-iy$ die zu z konjugiert komplexe Zahl,

(iv) $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ der Betrag von z.

Satz 6.3 *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:*

(i) $\overline{\overline{z}} = z$

(ii) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

(iii) $Re\, z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $Im\, z = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

(iv) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(v) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(vi) $|Re\, z| \leq |z|$, $|Im\, z| \leq |z|$, $|\overline{z}| = |z|$

(vii) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ *(falls $z \neq 0$)*

(viii) $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(ix) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(x) Dreiecksungleichung:

$|z+w| \leq |z| + |w|$

$|z+w| = |z| + |w| \Leftrightarrow (w = 0 \vee \exists \lambda \in \mathbb{R}_0^+ : z = \lambda w)$

(xi) Dreiecksungleichung nach unten:

$||z| - |w|| \leq |z-w|$

Bemerkung

Die Abbildung $z \mapsto \overline{z}$ kann geometrisch interpretiert werden als Spiegelung an der reellen Achse.

Satz 6.4 $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \, \exists! r \in \mathbb{R}_0^+ \exists! \varphi \in [0, 2\pi[\colon z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$. *Dabei gilt* $r = |z|$.

Bezeichnung: $\arg(\mathrm{z}) := \varphi$ (Argument von z).

Bemerkung

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z = x + iy = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$. Dann ist $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right), & x > 0, y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right), & x < 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right), & x > 0, y < 0 \end{cases}$$

Satz 6.5 *Seien* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *mit* $z_i := r_i(\cos\varphi_i + i\sin\varphi_i)$ *für* $i = 1, 2$. *Dann gilt*

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right).$$

Bemerkung

Für festes $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kann daher die Multiplikationsabbildung $z \mapsto wz$ geometrisch interpretiert werden als Drehstreckung (Verkettung von Drehung und zentrischer Streckung) mit Streckzentrum im Ursprung, Streckfaktor $|w|$ und Drehwinkel $\arg(w)$.

Korollar 6.6 *Sei* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. *Dann gilt für jedes* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$z^n = r^n \left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right).$$

Satz 6.7 *Sei* $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *mit* $a = |a|\, e^{i\varphi}$ *und* $n \in \mathbb{N}$. *Dann hat die Gleichung*

$$z^n = a$$

genau n *verschiedene komplexe Lösungen, nämlich*

$$z_k = |a|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} = |a|^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Definition *Ein Polynom*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad \textit{mit} \quad a_k \in \mathbb{C} \textit{ für } k = 0, \ldots, n$$

heißt komplexes Polynom.

Bemerkung

Alle Definitionen, Rechenverfahren, Sätze und Korollare aus Abschnitt 5.2 gelten auch für komplexe Polynome.

Zusätzlich gelten:

Satz 6.8 *Seien* $a, b, c \in \mathbb{C}$ *mit* $a \neq 0$. *Dann gilt*

$$az^2 + bz + c = 0 \iff z_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Hierbei bezeichnet $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ *die Lösungen von* $w^2 = b^2 - 4ac$.

Satz 6.9 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom* $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *mit* $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ *vom Grad* ≥ 1 *besitzt mindestens eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$.

Korollar 6.10 *Jedes komplexe Polynom*

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad \textit{mit } a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$$

vom Grad ≥ 1 *lässt sich über* $\mathbb{C}$ *in Linearfaktoren zerlegen, das heißt es existieren nicht notwendigerweise verschiedene* $\lambda_j \in \mathbb{C}$, *so dass*

$$p(z) = a_n (z - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_n).$$

Die Linearfaktoren $(z - \lambda_j)$ *sind bis auf die Reihenfolge eindeutig.*

Korollar 6.11 (Satz von Vieta) *Sei* $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *und* $a_n = 1$. *Dann gilt*

$$a_{n-1} = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \quad \textit{und} \quad a_0 = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \lambda_n.$$

Satz 6.12 *Sei p ein reelles Polynom. Dann gilt:*

a) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, dann ist auch $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle von p.

b) p besitzt eine der folgenden Darstellungen:

1. p ist Produkt von linearen rellen Polynomen.

2. p ist Produkt von quadratischen reellen Polynomen, welche keine reellen Nullstellen besitzen.

3. p ist Produkt von linearen reellen und quadratischen reellen Polynomen, wobei die quadratischen Polynome keine reellen Nullstellen haben.

Teil II
Lineare Algebra

7 Lineare Gleichungssysteme

Allgemeine Problemstellung:
Seien $m,n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $a_{ij}, b_i \in K$ für $i = 1,\ldots,m$ und $j = 1,\ldots n$. Gleichungen der Form

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & \cdots & & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & \cdots & & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

heißen ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit m Gleichungen, n Unbekannten $x_1,\ldots,x_n$, Koeffizienten $a_{ij} \in K$ und rechter Seite $(b_1,\ldots,b_n) \in K^m$.
Gesucht ist die Lösungsmenge

$$L = \left\{ (x_1,\ldots,x_n) \in K^n : \forall i \in \{1,\ldots,m\} : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \right\}$$

Eine Möglichkeit, L zu bestimmen, ist der Algorithmus von Gauß:

1. Bringe - gegebenenfalls durch Vertauschen von Zeilen - das LGS auf eine Form, bei der keine Zeile weiter links beginnt als die erste, d.h. es soll gelten

$$\forall i \geq 2 : \min\{j : a_{ij} \neq 0\} \geq \min\{j : a_{1j} \neq 0\}$$

2. Erreiche - gegebenenfalls durch Addition von Vielfachen der 1. Zeile zu den anderen Zeilen, dass gilt

$$\forall i \geq 2 : \min\{j : a_{ij} \neq 0\} > \min\{j : a_{1j} \neq 0\}$$

3. Wiederhole den bisherigen Vorgang, wobei die nächste Zeile (von oben nach unten gezählt) die Rolle der ersten Zeile in 1. und 2. übernimmt.
   Führe das Verfahren so lange durch, bis das entstandene LGS Zeilenstufenform hat, d.h. es ist von der Form

$$\begin{array}{ccccccccccc}
c_{1j_1}x_{j_1} & + & c_{1(j_1+1)}x_{j_1+1} & + & \cdots & & & \cdots & + c_{1n}x_n & = & d_1 \\
 & & & & c_{2j_2}x_{j_2} & + & \cdots & & \cdots & = & d_2 \\
 & & & & & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & c_{lj_l}x_l & + & \cdots & = & d_l \\
 & & & & & & & & 0 & = & d_{l+1} \\
 & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & 0 & = & d_m \ ,
\end{array}$$

wobei

1. $l \leq \min\{m,n\}$,
2. $j_1 < j_2 < ... < j_l$,
3. $\forall i \in \{1,...,l\} \forall j \in \{j_i,...,n\} : c_{ij} \in K$,
4. $\forall i \in \{1,...,n\} : d_i \in K$,
5. $\forall i \in \{1,...,l\} : c_{ij_i} \neq 0$.

Die Lösungsmenge dieses LGS ist gleich der Lösungsmenge des ursprünglichen LGS.

1. Fall: $l < m \wedge \exists i \in \{l+1,...,m\} : d_i \neq 0$.
Das LGS hat keine Lösung.

2. Fall: $(l = m \vee (l < m \wedge \forall i \in \{l+1,...,m\} : d_i = 0)) \wedge l = n$
Das LGS kann von unten nach oben eindeutig nach $x_m,...,x_1$ aufgelöst werden, es besitzt somit genau eine Lösung.

3. Fall: $(l = m \vee (l < m \wedge \forall i \in \{l+1,...,m\} : d_i = 0)) \wedge l < n$
Alle Variablen x_j mit $j \notin \{j_1, j_2, ..., j_l\}$ können mit beliebigen Werten aus K belegt werden. Für jede dieser Belegungen kann dann jeweils das LGS von unten nach oben eindeutig nach $x_{j_l},...,x_{j_1}$ aufgelöst werden. Das LGS hat somit unendlich viele Lösungen.

8 Vektoren

8.1 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

Definition *Auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Addition $+\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch:*

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \colon\ x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix},$$

sowie eine Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R}^n \colon\ \lambda x = \lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Definition *Ein Vektorraum V über einem Körper K (ein K-Vektorraum V) ist eine abelsche Gruppe $(V,+)$ versehen mit einer Skalarmultiplikation, d.h. mit einer Abbildung $\cdot : K\times V \to V$, $(\lambda,x)\mapsto \lambda x = \lambda\cdot x$, so dass gilt*

$$\begin{array}{ll} (S1) & \forall \lambda,\mu \in K\,\forall x\in V:\ (\lambda+\mu)x = \lambda x+\mu x, \\ (S2) & \forall \lambda \in K\,\forall x,y\in V:\ \lambda(x+y) = \lambda x+\lambda y, \\ (S3) & \forall \lambda,\mu \in K\,\forall x\in V:\ \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \\ (S4) & \forall x\in V:\ 1x = x. \end{array}$$

Die Elemente von V heißen Vektoren.

Satz 8.1 *$\mathbb{R}^n$ versehen mit den oben definierten Abbildungen $+$ und $\cdot$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

Satz 8.2 *Sei V ein K-Vektorraum. Dann gilt:*

(i) $\forall \lambda \in K\,\forall x\in V:\ \lambda x = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \lor x = 0$ *(x ist der Nullvektor),*

(ii) $\forall x\in V:\ (-1)x = -x$,

(iii) $\forall u,v\in V\,\exists!\,x\in V:\ u+x = v$, *und zwar $x = v-u$.*

Definition

a) *Seien* $a, b \in \mathbb{R}^n$ *und* $b \neq 0$. *Dann heißt*

$$g := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \exists \lambda \in \mathbb{R} \colon x = a + \lambda b\}$$

Gerade (durch die Punkte a *und* $b + a$*).*

b) *Seien* $p, q, r \in \mathbb{R}^n$ *und* $q, r \neq 0$ *und* $r \neq \lambda q$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Dann heißt*

$$E := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \colon x = p + \lambda q + \mu r\}$$

Ebene (durch die Punkte $p, q + p$ *und* $r + p$*).*

Die obigen Darstellungen der Mengen g *bzw.* E *heißen eine Parameterdarstellung der Geraden* g *bzw. der Ebene* E. *Der Punkt* a *heißt ein Aufpunkt,* b *ein Richtungsvektor von* g, p *ein Aufpunkt von* E, q *und* r *Richtungsvektoren von* E.

Definition *Sei* $(V, +, \cdot)$ *ein* K*-Vektorraum.*

a) $U \subseteq V$ *heißt Untervektorraum (von* V*), falls* U *mit den Abbildungen* $+|_{K \times U}$ *und* $\cdot|_{K \times U}$ *ein* K*-Vektorraum ist.*

b) $A \subseteq V$ *heißt affiner Raum, falls ein Vektor* $a \in V$ *und ein Unterraum* $U \subseteq V$ *existieren mit* $A = a + U$, *also*

$$A = \{x \in V \colon \exists u \in U \colon x = a + u\}.$$

Satz 8.3 *Sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$. Dann sind äquivalent:*

1. *U ist ein Untervektorraum.*
2. *$U \neq \emptyset \wedge \forall x, y \in U \, \forall \lambda, \mu \in K : \lambda x + \mu y \in U$.*

Definition

a) *Die Länge bzw. der Betrag bzw. die euklidische Norm von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch die Abbildung*

$$\| \,.\, \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \|x\|,$$

wobei

$$\|x\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

b) *Der Abstand zwischen zwei Vektoren im $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch die Abbildung*

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto d(x, y),$$

wobei

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Satz 8.4 *Für alle $x,y \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt*

$$
\begin{aligned}
&(N1) \quad \|x\| \geq 0 \wedge (\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0) && \textit{(Positive Definitheit)}\\
&(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| && \textit{(Homogenität)}\\
&(N3) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| && \textit{(Dreiecksungleichung)}
\end{aligned}
$$

Satz 8.5 *Für alle $x,y,z \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$
\begin{aligned}
&(M1) \quad d(x,y) \geq 0 \wedge (d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y) && \textit{(Positive Definitheit)}\\
&(M2) \quad d(x,y) = d(y,x) && \textit{(Symmetrie)}\\
&(M3) \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) && \textit{(Dreiecksungleichung)}
\end{aligned}
$$

Definition *Auf $\mathbb{R}^n$ ist das euklidische Skalarprodukt definiert durch die Abbildung*

$$\langle\,.\,,\,.\,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

wobei

$$\langle x,y\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Satz 8.6 *Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt*

$$
\begin{array}{lll}
(SP1) & \langle x,x \rangle \geq 0 \wedge (\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0) & \textit{(Positive Definitheit)} \\
(SP2) & \langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle & \textit{(Symmetrie)} \\
(SP3) & \langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle & \textit{(Linearität in der 1. Komponente)}
\end{array}
$$

Außerdem gilt

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}\ .$$

Korollar 8.7 *Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\langle z, \lambda x + y \rangle = \lambda \langle z,x \rangle + \langle z,y \rangle,$$

also die Linearität in der 2. Komponente.

Satz 8.8 (Parallelogrammgleichung) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Korollar 8.9 *Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\langle x,y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

Definition *Für* $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *heißt*

$$\varphi = \measuredangle(x,y) = \arccos\left(\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}\right)$$

der Winkel (bzw. das Bogenmaß des nicht orientierten Winkels) zwischen x *und* y*.*

Bemerkungen

1) Es gilt $\varphi \in [0,\pi]$ und $\langle x,y\rangle = \|x\|\,\|y\| \cos\varphi$.

2) Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$. Dann kann man zeigen, dass $\measuredangle(x,y)$ mit der Länge des kürzeren Kreisbogens zwischen x und y übereinstimmt.

Definition *Zwei Vektoren* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *heißen orthogonal zueinander, in Zeichen* $x \perp y$*, falls* $\langle x,y\rangle = 0$ *ist.*

Satz 8.10 (Satz des Pythagoras) *Seien* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *mit* $x \perp y$*. Dann gilt*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Definition *Auf $\mathbb{R}^3$ ist das Vektorprodukt bzw. Kreuzprodukt definiert durch die Abbildung $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit*

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - b_3 a_1 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}.$$

Satz 8.11 *Für $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt*

(i) $e_i \times e_i = 0$ *für* $i = 1, 2, 3$,

(ii) $e_1 \times e_2 = e_3$ *und* $e_2 \times e_3 = e_1$ *und* $e_3 \times e_1 = e_2$,

(iii) $a \times b = -(b \times a)$,

(iv) $(\lambda a + b) \times c = \lambda (a \times c) + b \times c$,

(v) $\langle a \times b, a \rangle = \langle a \times b, b \rangle = 0$,

(vi) $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin(\measuredangle(a, b))$.

Definition

a) *Der Flächeninhalt des von* $a, b \in \mathbb{R}^3$ *aufgespannten Parallelogramms* P, *d.h.*

$$P = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon \exists \lambda, \mu \in [0,1] \colon x = \lambda a + \mu b\right\}$$

ist definiert durch $\|a \times b\|$.

b) *Der Flächeninhalt des von* a, b *aufgespannten Dreiecks* D, *d.h.*

$$D = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon \exists \lambda \in [0,1]\, \exists \mu \in [0,\lambda] \colon x = \lambda a + \mu(b - a)\right\}$$

ist definiert durch $\frac{1}{2}\|a \times b\|$.

Definition

a) Auf $\mathbb{R}^3$ *ist das Spatprodukt definiert durch die Abbildung*

$$[\,.\,,\,.\,,\,.\,]\colon \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\qquad [a,b,c]=\langle a\times b,c\rangle.$$

b) Das Volumen des von $a,b,c\in\mathbb{R}^3$ *aufgespannten Spats* S*, d.h.*

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}^3\colon\ \exists\lambda,\mu,\nu\in[0,1]\colon x=\lambda a+\mu b+\nu c\right\}$$

ist definiert durch $|[a,b,c]|$.

Satz 8.12 *Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene. Dann gibt es einen Vektor $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|n\| = 1$ und genau eine Zahl $d \in \mathbb{R}_0^+$, so dass*

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 - d = 0 \right\} = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \langle n, x \rangle = d \} \qquad (1)$$

gilt. Außerdem gilt:

$$\forall a, b \in E : \langle n, b - a \rangle = 0 \qquad (2)$$

Umgekehrt gibt es für jeden Vektor $n \in \mathbb{R}^3$ mit $\|n\| = 1$ und jede Zahl $d \in \mathbb{R}_0^+$ genau eine Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$, für die (1) und (2) gilt.

Bemerkungen

1) Eine Gleichung der Form $n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3-d=0$ mit n_1, n_2, $n_3 \in \mathbb{R}$, $\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}=1$ und $d \in \mathbb{R}_0^+$ nennt man Hessesche Normalenform (HNF) der Ebene, die durch die Lösungsmenge dieser Gleichung beschrieben wird.

2) Eine Ebene besitzt genau dann eine eindeutig bestimmte HNF, falls $d>0$ ist. Im Fall $d=0$ sind sowohl $n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=0$ als auch $-n_1x_1-n_2x_2-n_3x_3=0$ Hessesche Normalenform derselben Ebene.

3) Ein Vektor $n \in \mathbb{R}^3$, der (2) erfüllt, heißt ein Normalenvektor von E. Ist zusätzlich $\|n\|=1$, dann heißt n ein Normaleneinheitsvektor von E.

4) Seien $q, r \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ zwei Richtungsvektoren einer Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $r \neq \lambda q$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{\alpha(q \times r) : \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ die Menge aller Normalenvektoren von E und $\left\{\pm \dfrac{q \times r}{\|q \times r\|}\right\}$ die Menge aller Normaleneinheitsvektoren von E.

Definition *Seien* $v_i \in \mathbb{R}^3, i = 1,2\,,$ *Richtungsvektoren der Geraden* g_i *und* $n_i \in \mathbb{R}^3$ *Normalenvektoren der Ebenen* E_i*. Dann heißt*

a) g_1 *parallel zu* g_2*, in Zeichen:* $g_1 \| g_2$*, falls gilt:* $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : v_1 = \lambda v_2$*,*

b) $E_1 \| E_2$*, falls gilt* $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : n_1 = \lambda n_2$*,*

c) $g_1 \| E_1$*, falls gilt* $n_1 \perp v_1$*.*

8.2 Weitere Beispiele für Vektorräume

1) $\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} : z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C} \right\}$ mit

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + w_1 \\ \vdots \\ z_n + w_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z_1 \\ \vdots \\ \lambda z_n \end{pmatrix}$$

ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

2) Sei K ein beliebiger Körper. Dann ist K^n, wobei $+$ und $\cdot$ wie in $1)$ definiert sind, ein K-Vektorraum.

3) Die Menge aller reellen Folgen, d.h. Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \lambda (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

4) Die Menge aller reellen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x), \qquad \lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$$

ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
In diesem Vektorraum ist die Menge aller reellen Polynome $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Untervektorraum, der wiederum die Mengen aller reellen Polynome vom Grade $\leq n$ für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$ als Untervektorräume enthält.

5) In $3)$ und $4)$ kann $\mathbb{R}$ auch durch $\mathbb{C}$ ersetzt werden.

Definition *Sei V ein K-Vektorraum und $M \subseteq V$.*

a) *Ein Vektor $x \in V$ heißt eine Linearkombination von Vektoren aus M, falls es endlich viele Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in M$ gibt, so dass $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ mit $\lambda_i \in K$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt. x heißt dann auch eine Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$.*

b) *Ist $M \neq \emptyset$, dann heißt die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus M der Aufspann von M oder die lineare Hülle von M, in Zeichen: $Span(M)$. Für $\emptyset$ definiert man $Span(\emptyset) = \{0\}$.*

c) *M heißt ein Erzeugendensystem von V, falls $Span(M) = V$ ist.*

d) *M heißt linear unabhängig (l.u.), falls für jede endliche Teilmenge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von M gilt:*

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

In diesem Fall heißen auch die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig. M heißt linear abhängig (l.a.), falls M nicht linear unabhängig ist.

e) *$B \subseteq V$ heißt Basis von V, falls B linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von V ist.*

Satz 8.13 *Sei V ein K-Vektorraum und $M \subseteq V$ mit $M \neq 0$. Dann sind äquivalent:*

(i) M ist linear unabhängig.

(ii) Für jedes Element aus $Span(M)$ gibt es eine eindeutige Darstellung als Linearkombination von Vektoren aus M, d.h.
$\forall x \in Span(M) \setminus \{0\} \exists! n \in \mathbb{N} \exists! (v_1, \ldots, v_n) \in M^n$ mit paarweise verschiedenen Vektoren $v_i \exists! (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \wedge \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \lambda_i \neq 0$.

Satz 8.14 *Sei V ein K-Vektorraum und $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:*

(i) B ist eine Basis von V.

(ii) B ist eine maximale linear unabhängige Menge von V, d.h.
B ist l.u. $\wedge \forall B' \in \mathscr{P}(V) : B \subseteq B' \wedge B'$ l.u. $\Rightarrow B' = B$.

(iii) B ist ein minimales Erzeugendensystem von V, d.h.
$Span(B) = V \wedge \forall B' \in \mathscr{P}(V) : B' \subseteq B \wedge Span(B') = V \Rightarrow B' = B$.

Ist $B \neq \emptyset$, dann sind $(i), (ii), (iii)$ auch äquivalent zu

(iv) $\forall x \in V \setminus \{0\} \; \exists! n \in \mathbb{N} \; \exists! (b_1, \ldots, b_n) \in B^n$ mit paarweise verschiedenen $b_i \wedge$
$\exists! (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \wedge \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \lambda_i \neq 0$.
Jedes λ_i heißt dann Koordinate von x bezüglich des Basisvektors b_i.

Satz 8.15 (Basisergänzungssatz) *Sei V ein K-Vektorraum mit einer endlichen Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $M = \{v_1, \ldots, v_m\}$ sei eine linear unabhängige Teilmenge von V. Dann ist $m \leq n$ und es existieren $n - m$ Elemente aus B, durch die M zu einer Basis von V ergänzt werden kann.*

Korollar 8.16 *Sei V ein K-Vektorraum mit einer endlichen Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$.*
Dann hat jede Basis von V genau n Elemente.

Definition *Besitzt ein K-Vektorraum V eine Basis mit genau n Elementen, dann heißt n die Dimension von V und V heißt n-dimensional.*
Bezeichnung: $n = dim V$.
Besitzt V keine endliche Basis, dann heißt V unendlich-dimensional.
Bezeichnung: $dim V = \infty$.

Satz 8.17 *Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.*

9 Lineare Abbildungen

9.1 Grundlegende Eigenschaften

Definition *Seien V, W K-Vektorräume.*

a) *Eine Abbildung $L : V \to W$ heißt linear oder Vektorraum-Homomorphismus, falls gilt:*

$$\forall x, y \in V \, \forall \lambda, \mu \in K : L(\lambda x + \mu y) = \lambda L(x) + \mu L(y)$$

Kurzschreibweise: Lx statt $L(x)$ für alle $x \in V$.

b) *Eine lineare Abbildung $L : V \to K$ heißt Linearform.*

c) *Eine bijektive lineare Abbildung $L : V \to W$ heißt (Vektorraum-) Isomorpismus. Existiert ein Isomorphismus $L : V \to W$, dann heißen V und W isomorph.*

d) *Eine Abbildung $A : V \to W$ heißt affin, falls ein Vektor $a \in W$ und eine lineare Abbildung $L : V \to W$ existieren, so dass gilt:*

$$\forall x \in V : A(x) = L(x) + a.$$

Definition *Seien V,W Vektorräume und sei $L: V \to W$ linear. Dann heißt*

a) $Bild(L) = L(V) = \{L(x) : x \in V\}$ *das Bild von L,*

b) $Kern(L) = L^{-1}(\{0\}) = \{x \in V : L(x) = 0\}$ *der Kern von L.*

Satz 9.1 *Seien V,W Vektorräume und sei $L: V \to W$ linear. Dann gilt:*

(i) $L(0) = 0$

(ii) Alle Bildmengen von Untervektorräumen von V sind Untervektorräume von W, insbesondere auch $Bild(L)$.

(iii) Alle Urbildmengen von Untervektorräumen von W sind Untervektorräume von V, insbesondere auch $Kern(L)$.

(iv) L ist injektiv $\Leftrightarrow$ $Kern(L) = \{0\}$.

Satz 9.2 *Seien U,V,W K-Vektorräume. Dann gilt:*

a) *Sind $J: U \to V$ und $L: U \to V$ linear, dann sind für alle $\alpha, \beta \in K$ auch $\alpha J + \beta L: U \to V$ linear.*

b) *Sind $L: U \to V$ und $S: V \to W$ linear, dann ist auch $S \circ L: U \to W$ linear.*

c) *Ist $T: V \to V$ Isomorphismus, dann ist auch $T^{-1}: V \to V$ Isomorphismus.*

d) *Die Menge aller linearen Abbildungen von U nach V ist mit der Addition und der Skalarmultiplikation aus a) ein K-Vektorraum.*

e) *Die Menge aller linearen Abbildungen von V nach V ist mit den Verknüpfungen $+$ und $\circ$ ein Ring.*

f) *Die Menge aller Isomorphismen von V nach V ist bezüglich $\circ$ eine Gruppe.*

Satz 9.3 (Dimensionsformel) *Seien V,W K-Vektorräume, wobei V endlich-dimensional sei, und $L: V \to W$ sei linear. Dann gilt:*

$$dim V = dim Kern(L) + dim Bild(L)$$

Definition *Seien V,W Vektorräume und sei $L : V \to W$ linear. Dann heißt $Rang(L) := dim Bild(L)$ der Rang von L.*

Satz 9.4 *Seien V,W K-Vektorräume, B eine Basis von V und $f : B \to W$ eine beliebige Abbildung. Dann gibt es genau eine lineare Abb. $L : V \to W$ mit $L(y) = f(y)$ für alle $y \in B$.*

9.2 Lineare Abbildungen und Matrizen

Defintion *Sei K ein Körper und* $m, n \in \mathbb{N}$*. Eine Abbildung* $A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to K, (i, j) \mapsto a_{ij} \in K$ *heißt* $m \times n$*-Matrix über K.*
Eine $m \times n$*-Matrix A wird dargestellt als rechteckiges Schema der Form:*

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in K^m$ *heißen Spaltenvektoren, die Vektoren* $(a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in K^n$ *heißen Zeilenvektoren von A. Die Menge aller* $m \times n$*-Matrizen über K wird mit* $K^{m \times n}$ *bezeichnet.*

Definition *Das Produkt einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ mit einem Vektor $x \in K^n$ ist definiert durch den Vektor $Ax \in K^m$ mit*

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix}.$$

Satz 9.5 *Sei V ein K-Vektorraum mit endlicher Basis* $B = \{b_1, \dots, b_n\}$*, W ein K-Vektorraum mit endlicher Basis* $C = \{c_1, \dots, c_m\}$.

a) *Sei* $L : V \to W$ *linear. Dann existiert genau eine Matrix* $M = M_L^{C,B} \in K^{m \times n}$*, so dass gilt:*

Ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ *die Koordinatendarstellung von* $x \in V$ *bezüglich* B*, dann ist*

$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^m$ *die Koordinatendarstellung von* Lx *bezüglich* C.

Insbesondere ist der j-te Spaltenvektor $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ *von* M *die Koordinatendarstellung von* Lb_j *bezüglich* C.

b) *Sei* $M \in K^{m \times n}$*. Dann existiert genau eine lineare Abbildung* $L : V \to W$*, so dass* $M = M_L^{C,B}$ *ist.*

Bemerkung

Wir verwenden hier und im Folgenden die Schreibweise $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ zur Bezeichnung einer geordneten Basis, d.h. eines n-Tupels $(b_1, \ldots, b_n) \in V^n$ mit der Eigenschaft, dass $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V ist. Die Indizes legen also die Reihenfolge der Basisvektoren fest. Entsprechendes gilt für $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$.

Bezeichnung

Sei $M \in K^{m \times n}$. Dann sei $L_M : K^n \to K^m$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung, für die $M = M_{L_M}^{\mathscr{E}_m \mathscr{E}_n}$, wobei $\mathscr{E}_j = \{e_1, \ldots, e_j\}$ die geordnete kanonische Basis von K^j mit $j \in \{m, n\}$ sei.

Definition

a) Auf $K^{m\times n}$ sind eine Addition und eine Skalarmultiplikation definiert durch:

$$\forall A=(a_{ij})\in K^{m\times n}\,\forall B=(b_{ij})\in K^{m\times n}:\ A+B:=(a_{ij}+b_{ij}),$$

$$\forall\lambda\in K\,\forall A=(a_{ij})\in K^{m\times n}:\ \lambda A:=(\lambda a_{ij}).$$

b) Die Matrizenmultiplikation ist eine Abbildung von $K^{l\times m}\times K^{m\times n}$ nach $K^{l\times n}$, definiert durch

$$\forall A\in K^{l\times m}\,\forall B\in K^{m\times n}:\ AB=C:=(c_{ij})\in K^{l\times n}\ \textit{mit}\ c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}.$$

c) Eine Matrix $A\in K^{n\times n}$ heißt invertierbar, falls eine Matrix $A^{-1}\in K^{n\times n}$ existiert mit $A^{-1}A=E_n=AA^{-1}$, wobei

$$E_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}=(\delta_{ij})\ \textit{mit}\ \delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}.$$

A^{-1} heißt inverse Matrix zu A und E_n die Einheitsmatrix.

Satz 9.6 *Seien* U, V, W K*-Vektorräume mit* $dim U = n \geq 1$, $dim V = m \geq 1$, $dim W = l \geq 1$ *und geordneten Basen* B_U, B_V, B_W. *Dann gilt:*

a) Sind $J : U \to V$ *und* $L : U \to V$ *linear und haben die Matrixdarstellungen* $M_J^{B_V,B_U} \in K^{m \times n}$ *bzw.* $M_L^{B_V,B_U} \in K^{m \times n}$, *dann folgt:*

$$\forall \alpha, \beta \in K : M_{\alpha J + \beta L}^{B_V,B_U} = \alpha M_J^{B_V,B_U} + \beta M_L^{B_V,B_U}.$$

b) Sind $L : U \to V$ *und* $S : V \to W$ *linear mit den Matrixdarstellungen* $M_L^{B_V,B_U} \in K^{m \times n}$ *bzw.* $M_S^{B_W,B_V} \in K^{l \times m}$, *dann folgt:*

$$M_{S \circ L}^{B_W,B_U} = M_S^{B_W,B_V} M_L^{B_V,B_U}.$$

c) Ist $T : V \to V$ *Isomorphismus mit Matrixdarstellung* $M_T^{B_V,B_V} \in K^{m \times m}$, *dann folgt:*

$$M_{T^{-1}}^{B_V,B_V} = (M_T^{B_V,B_V})^{-1}.$$

Satz 9.7 *a)* $K^{m\times n}$ *ist mit der oben def. Addition und Skalarmultiplikation ein* K*-Vektorraum, welcher isomorph zu* $K^{m\cdot n}$ *sowie zum Vektorraum aller linearen Abbildungen von* V *nach* W *ist, wobei* V *ein beliebiger n-dimensionaler und* W *ein beliebiger m-dimensionaler* K*-Vektorraum ist, z.B.* K^n *und* K^m.

b) $K^{n\times n}$ *ist bzgl. der Addition und der Matrixmultiplikation ein Ring.*

c) Die Menge aller invertierbaren Matrizen aus $K^{n\times n}$ *ist bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe, die sogenannte allgemeine lineare Gruppe* $GL(n,K)$.

Bemerkung

Für $n \geq 2$ sind weder der Ring $K^{n\times n}$ noch die Gruppe $GL(n,K)$ kommutativ, da die Matrixmultiplikation im Allgemeinen nicht kommutativ ist.

Korollar 9.8 *a)* $A \in K^{n\times n} \wedge \exists B \in K^{n\times n}\colon BA = E_n \Rightarrow$ *A ist invertierbar und* A^{-1} *ist eindeutig bestimmt.*

b) $A \in K^{n\times n}$ *ist invertierbar* $\Rightarrow A^{-1}$ *ist invertierbar mit* $(A^{-1})^{-1} = A$.

c) $A, B \in K^{n\times n}$ *sind invertierbar* $\Rightarrow AB \in K^{n\times n}$ *ist invertierbar mit* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Korollar 9.9 *Sei* V *ein n-dimensionaler* K*-Vektorraum mit einer geordneten Basis* B_V *und sei* $L : V \to V$ *linear. Dann gilt :*

$$L \textit{ ist bijektiv.} \Leftrightarrow M_L^{B_V,B_V} \textit{ ist invertierbar.}$$

Definition *Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit geordneten Basen B und B'. Dann heißt die Matrix $M_{Id_V}^{B',B}$ die Basiswechselmatrix (oder Übergangsmatrix) von B zu B'. Dabei ist der j-te Spaltenvektor von $M_{Id_V}^{B',B}$ die Darstellung des j-ten Basisvektors der alten Basis B in den Koordinaten der neuen Basis B'.*

Satz 9.10 *(Koordinatentransformation) Seien V,W endlich-dimensionale K-Vektorräume, B,B' geordnete Basen von V und C,C' geordnete Basen von W. Sei $L: V \to W$ linear, $M = M_L^{C,B}, R = M_{Id_V}^{B,B'}$ und $S = M_{Id_W}^{C,C'}$. Dann gilt:*

a) $M_L^{C',B} = M_{Id_W}^{C',C} M_L^{C,B} = \left(M_{Id_W}^{C,C'}\right)^{-1} M_L^{C,B} = S^{-1}M$,

b) $M_L^{C,B'} = M_L^{C,B} M_{Id_V}^{B,B'} = MR$,

c) $M_L^{C',B'} = M_{Id_W}^{C',C} M_L^{C,B} M_{Id_V}^{B,B'} = S^{-1}MR$.

d) Ist $V = W$, $B = C$ und $B' = C'$, dann folgt $M_L^{B',B'} = S^{-1} M_L^{B,B} S$.

Definition

a) $A,B \in K^{m\times n}$ *heißen äquivalent, falls $S \in GL(m,K)$ und $R \in GL(n,K)$ existieren mit $B = S^{-1}AR$.*

b) $A,B \in K^{n\times n}$ *heißen ähnlich, falls $S \in GL(n,K)$ existiert mit $B = S^{-1}AS$.*

9.3 Der Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen, Matrizen und linearen Gleichungssystemen

Satz 9.11 *Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ invertierbar. Dann kann A^{-1} folgendermaßen berechnet werden. Bringe das LGS mit n rechten Seiten $A \mid E_n$, d.h. $Ax = E_n$,*

$$
\begin{array}{rcllllll}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 1 & \textit{bzw.} & 0 & \cdots & \textit{bzw.} & 0 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 & \text{''} & 1 & \cdots & \text{''} & 0 \\
& \vdots & & & & & & \\
a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = & 0 & \text{''} & 0 & \cdots & \text{''} & 1
\end{array}
$$

durch Anwendung der Zeilenumformungen des Gauß-Algorithmus (gleichzeitig für alle n rechten Seiten) auf die Form

$$
\left.\begin{array}{ccccc|ccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\
0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn}
\end{array}\right. .
$$

Dann ist $A^{-1} = (b_{ij})$.

Definition *Sei $A \in K^{m \times n}$.*

a) *Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A heißt Spaltenrang von A.*

b) *Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von A heißt Zeilenrang von A.*

Satz 9.12 a) *Der Zeilenrang von $A \in K^{m \times n}$ ändert sich nicht durch elementare Zeilenumformungen, d.h. Vertauschen von Zeilen, Multiplikation einer Zeile mit $a \in K \setminus \{0\}$ oder Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.*

b) *Der Spaltenrang von $A \in K^{m \times n}$ ändert sich nicht durch elementare Spaltenumformungen, d.h. Vertauschen von Spalten, Multiplikation einer Spalte mit $a \in K \setminus \{0\}$ oder Addition eines Vielfachen einer Spalte zu einer anderen Spalte.*

Satz 9.13 *Sei $A \in K^{m \times n}$. Dann gilt:*

$$Zeilenrang\ von\ A \ = \ Spaltenrang\ von\ A$$

Definition *Für $A \in K^{m \times n}$ heißt Rang(A) $:=$ Spaltenrang von A $=$ Zeilenrang von A der Rang von A.*

Satz 9.14 *Sei $A \in K^{m \times n}$ und L_A wie in Abschnitt 9.2. Dann gilt:*

$$Rang(A) = Rang(L_A).$$

Definition *Für $A \in K^{m \times n}$ heißt $Kern(A) := Kern(L_A)$ der Kern von A.*

Satz 9.15 *Sei $A \in K^{m \times n}$ und $0 \neq b \in K^m$. Dann gilt:*

a) Die Lösungsmenge des homogenen LGS $Ax = 0$ stimmt mit $Kern(A)$ überein.

b) Das inhomogene LGS $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn $b \in Bild(L_A)$. In diesem Fall ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$x_0 + Kern(A) = \{x_0 + y : y \in Kern(A)\},$$

wobei x_0 eine beliebige Lösung von $Ax = b$ ist.

Korollar 9.16 *Sei $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$. Dann gilt: Die Lösungsmenge des LGS $Ax = b$ ist die leere Menge oder ein affiner Raum. Ist $b = 0$, dann ist sie ein Untervektorraum von K^n.*

Korollar 9.17 *Sei $A \in K^{m \times n}$. Dann gilt:*

a) *Das LGS $Ax = b$ besitzt für jedes $b \in K^m$ mindestens eine Lösung.*
$\Leftrightarrow Rang(A) = m$

b) *Das LGS $Ax = b$ besitzt für jedes $b \in K^m$ höchstens eine Lösung.*
$\Leftrightarrow Rang(A) = n$

Korollar 9.18 *Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann ist äquivalent:*

(i) *Das LGS $Ax = b$ besitzt für jedes $b \in K^n$ genau eine Lösung.*

(ii) *Das homogene LGS $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung $x = 0$.*

(iii) $Rang(A) = n$

(iv) *A ist invertierbar.*

(v) *L_A ist bijektiv.*

10 Skalarprodukträume

10.1 Skalarprodukte, Normen und Metriken

Definition

a) *Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{R}$ heißt (reelles) Skalarprodukt, wenn für alle $x,y,z\in V$ und alle $\lambda\in\mathbb{R}$ gilt:*

$$\begin{array}{ll} (SP1) & \langle x,x\rangle \geq 0 \quad\wedge\quad (\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0), \\ (SP2) & \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle, \\ (SP3) & \langle \lambda x+y,z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle. \end{array}$$

V zusammen mit einem reellen Skalarprodukt heißt (reeller) Skalarproduktraum oder euklidischer Vektorraum.

b) *Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{C}$ heißt (komplexes) Skalarprodukt, wenn für alle $x,y,z\in V$ und alle $\lambda\in\mathbb{C}$ gilt:*

$$\begin{array}{ll} (SP1) & \langle x,x\rangle \geq 0 \quad\wedge\quad (\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0), \\ (SP2) & \langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}, \\ (SP3) & \langle \lambda x+y,z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle. \end{array}$$

V zusammen mit einem komplexen Skalarprodukt heißt (komplexer) Skalarproduktraum oder unitärer Vektorraum.

Satz 10.1 *a) Sei* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *ein reeller Skalarproduktraum. Dann gilt für alle* $x, y, z \in V$ *und alle* $\lambda \in \mathbb{R}$ *:*

$$\langle z, \lambda x + y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \langle z, y \rangle.$$

b) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *ein komplexer Skalarproduktraum. Dann gilt für alle* $x, y, z \in V$ *und alle* $\lambda \in \mathbb{C}$ *:*

$$\langle z, \lambda x + y \rangle = \overline{\lambda} \langle z, x \rangle + \langle z, y \rangle.$$

Sei von nun an $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Satz 10.2 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) *Sei* V *ein Skalarproduktraum und* $x, y \in V$. *Dann ist*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Außerdem gilt für $x, y \in V \setminus \{0\}$ *die Gleichheit genau dann, wenn es ein* $\alpha \in \mathbb{K}$ *gibt, so dass* $x + \alpha y = 0$, *d.h. wenn* x *und* y *linear abhängig sind.*

Skalarprodukte können zur Abstandsmessung verwendet werden.

Definition *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ heißt Norm, wenn für alle $x, y, z \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$\begin{array}{ll} (N1) & \|x\| \geq 0 \quad \wedge \quad (\,\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0\,), \\ (N2) & \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|, \\ (N3) & \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (Dreiecksungleichung). \end{array}$$

V zusammen mit einer Norm heißt normierter Raum.

Satz 10.3 *In jedem Skalarproduktraum V lässt sich durch*

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

eine Norm einführen. Man nennt sie die durch das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm.

Satz 10.4 (Parallelogrammgleichung) *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Skalarproduktraum und $\|\cdot\|$ die von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm. Dann gilt:*

$$\forall x, y \in V : \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Satz 10.5 *Genau diejenigen normierten Räume V, in denen die Parallelogrammgleichung gilt, sind Skalarprodukträume. Im reellen Fall lässt sich dann durch*

$$\langle x,y\rangle := \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right)$$

und im komplexen Fall durch

$$\langle x,y\rangle := \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i\cdot(||x+iy||^2 - ||x-iy||^2)\right)$$

ein Skalarprodukt auf V erklären, welches die Norm $||\cdot||$ induziert.

Definition *Sei V ein reeller Skalarproduktraum und seien $x,y \in V\setminus\{0\}$. Dann nennt man $\alpha \in [0,\pi]$ mit*

$$\cos(\alpha) := \frac{\langle x,y\rangle}{||x||\,||y||}$$

den Winkel zwischen x und y.

Definition *Sei V ein Skalarproduktraum. $x,y \in V$ heißen orthogonal zueinander, in Zeichen $x\perp y$, wenn $\langle x,y\rangle = 0$ ist.*

Satz 10.6 (Satz des Pythagoras) *Sei V ein Skalarproduktraum und $x, y \in V$ orthogonal zueinander. Dann gilt*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Definition (X, d) *heißt metrischer Raum, falls X eine nichtleere Menge ist und $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften: Für alle $x, y, z \in X$ gilt*

$$\begin{array}{ll} (M1) & d(x,y) \geq 0 \quad \wedge \quad (d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y), \\ (M2) & d(y,x) = d(x,y) \quad (Symmetrie), \\ (M3) & d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad (Dreiecksungleichung). \end{array}$$

d heißt dann eine Metrik (auf X).

Satz 10.7 *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist durch $d(x,y) := \|x-y\|$ eine Metrik auf V definiert.*

Definition

a) *Sei V ein K-Vektorraum. Eine Abbildung $b : V \times V \to K$ heißt Bilinearform (auf V), falls sie bezüglich jeder Komponente linear ist, also, falls gilt:*

$$\forall x, y, z \in V \ \forall \lambda \in K : \ b(\lambda x + y, z) = \lambda b(x, z) + b(y, z),$$

$$\forall u, v, w \in V \ \forall \mu \in K : \ b(u, \mu v + w) = \mu b(u, v) + b(u, w).$$

b) *Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine Abbildung $b : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt Sesquilinearform (auf V), falls sie linear bezüglich der ersten Komponente und konjugiert linear bzgl. der zweiten Komponente ist, d.h., falls gilt:*

$$\forall x, y, z \in V \ \forall \lambda \in \mathbb{C} : \ b(\lambda x + y, z) = \lambda b(x, z) + b(y, z),$$

$$\forall u, v, w \in V \ \forall \mu \in \mathbb{C} : \ b(u, \mu v + w) = \overline{\mu} b(u, v) + b(u, w).$$

c) *Eine Bilinearform b auf V heißt symmetrisch, falls gilt:*

$$\forall x, y \in V : b(x, y) = b(y, x).$$

d) *Eine Sesquilinearform b auf V heißt hermitesch, falls gilt:*

$$\forall x, y \in V : \ b(x, y) = \overline{b(y, x)}.$$

e) Sei b eine Bilinearform oder eine Sesquilinearform. Dann heißt die Abbildung $q : x \mapsto b(x,x)$ die zu b gehörende quadratische Form q.

f) Eine Bilinearform bzw. eine Sesquilinearform b auf V bzw. die zugehörige quadratische Form q heißt

$$\left\{\begin{matrix} positiv\ definit \\ positiv\ semidefinit \\ negativ\ definit \\ negativ\ semidefinit \end{matrix}\right\}, falls\ \forall x \in V \setminus \{0\} : \left\{\begin{matrix} q(x) > 0 \\ q(x) \geq 0 \\ q(x) < 0 \\ q(x) \leq 0 \end{matrix}\right\}.$$

Anderenfalls heißen b bzw. q indefinit.

Satz 10.8 *a) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $f : V \times V \to \mathbb{R}$ ist genau dann ein reelles Skalarprodukt, wenn sie eine positiv definite, symmetrische Bilinearform ist.*

b) Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine Abbildung $f : V \times V \to \mathbb{C}$ ist genau dann ein komplexes Skalarprodukt, wenn sie eine positiv definite, hermitesche Sesquilinearform ist.

Definition *Sei* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$.

a) $A^T \in K^{n\times m}$ *mit* $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *heißt transponierte Matrix von A.*

b) *Ist* $K = \mathbb{C}$, *dann heißt* $\overline{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *mit* $\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{a_{m1}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}$ *komplex konjugierte Matrix zu A.*

c) *Ist* $K = \mathbb{C}$, *dann heißt* $A^* := \overline{A}^T$ *die adjungierte Matrix zu A. Ist* $K = \mathbb{R}$, *dann heißt* $A^* := A^T$ *die adjungierte Matrix zu A.*

d) *Ist* $A = A^T$, *dann heißt A symmetrisch.*

e) *Ist* $A = \overline{A}^T$, *dann heißt A hermitesch.*

f) *Ist* $A = A^*$, *dann heißt A selbstadjungiert.*

g) Sei $K = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$ und A symmetrisch oder hermitesch. Dann heißt A positiv definit / positiv semidefinit / negativ definit / negativ semidefinit / indefinit, falls die quadratische Form $q_A : K^n \to K,\ x \mapsto x^T Ax$ positiv definit / positiv semidefinit / negativ definit / negativ semidefinit / indefinit ist. (Hierbei wird x^T als $1 \times n$-Matrix aufgefasst.)

Satz 10.9 *(i)* $(A^T)^T = A$

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(iii) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

(iv) $(AC)^T = C^T A^T$

Satz 10.10 *Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Dann gilt:*

$$\forall x \in \mathbb{K}^n\ \forall y \in \mathbb{K}^m :\ \langle Ax, y\rangle_{\mathbb{K}^m} = \langle x, A^* y\rangle_{\mathbb{K}^n}.$$

Korollar 10.11 *Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Dann gilt:*

$$x \in Kern(L_A) \Leftrightarrow \forall y \in Bild(L_{A^*}) :\ \langle x, y\rangle_{\mathbb{K}^n} = 0.$$

Korollar 10.12 *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert. Dann gilt:*

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n :\ \langle Ax, y\rangle_{\mathbb{K}^n} = \langle x, Ay\rangle_{\mathbb{K}^n}.$$

Satz 10.13 *Sei V ein n-dim. K-Vektorraum mit geordneter Basis* $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$.

a) Sei $b : V \times V \to K$ *bilinear. Dann existiert genau eine Matrix* $M = M_b^B \in K^{n \times n}$*, so dass gilt: Sind* $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$ *die Koordinatendarstellungen von* $x, y \in V$ *bzgl.* B*, dann ist* $b(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} M_b^B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Insbesondere ist $M_b^B = \begin{pmatrix} b(b_1,b_1) & \cdots & b(b_1,b_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b(b_n,b_1) & \cdots & b(b_n,b_n) \end{pmatrix}$.

b) Sei $K = \mathbb{C}$ und $\sigma : V \times V \to \mathbb{C}$ sesquilinear. Dann existiert genau eine Matrix $M = M_\sigma^B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so dass gilt: Sind $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ die Koordinatendarstellungen von $x, y \in V$ bzgl. B, dann ist $\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} M_\sigma^B \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$.

Insbesondere ist $M_\sigma^B = \begin{pmatrix} \sigma(b_1,b_1) & \cdots & \sigma(b_1,b_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma(b_n,b_1) & \cdots & \sigma(b_n,b_n) \end{pmatrix}$.

c) Sei $M \in K^{n\times n}$. Dann existiert genau eine Bilinearform b und im Falle $K = \mathbb{C}$ zusätzlich genau eine Sesquilinearform σ, so dass $M = M_b^B$ bzw. $M = M_\sigma^B$ gilt.

Korollar 10.14 *Seien V, B, b und σ wie in Satz 10.13. Sei $B' = \{b'_1, \ldots, b'_n\}$ eine weitere Basis von V und $S = M_{Id_V}^{B,B'}$. Dann gilt:*

$$M_b^{B'} = S^T M_b^B S,$$
$$M_\sigma^{B'} = S^T M_\sigma^B \overline{S}.$$

Korollar 10.15 *Seien V, B, b und σ wie in Satz 10.13. Dann gilt:*

(i) b ist symmetrisch. $\Leftrightarrow$ M_b^B ist symmetrisch.

(ii) σ ist hermitesch. $\Leftrightarrow$ M_σ^B ist hermitesch.

(iii) b bzw. σ ist positiv definit / positiv semidefinit / negativ definit / negativ semidefinit / indefinit.
$\Leftrightarrow$ M_b^B bzw. M_σ^B ist positiv definit / positiv semidefinit / negativ definit / negativ semidefinit / indefinit.

10.2 Orthonormalsysteme und orthogonale Projektionen

Definition *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein Skalarproduktraum und* $I \neq \emptyset$.

a) Eine Menge $(v_i)_{i\in I} = \{v_i : i \in I\} \subseteq V$ *mit* $v_i \neq 0$ *für alle* $i \in I$ *heißt Orthogonalsystem, falls* $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ *für alle* $i \neq j$ *ist.*

b) Ein Orthogonalsystem heißt Orthonormalsystem (ONS), falls $\langle v_i, v_i\rangle = 1$ *für alle* $i \in I$ *ist.*

c) Ein ONS heißt Orthonormalbasis (ONB) von V, falls es eine Basis von V ist.

Satz 10.16 *Jedes Orthogonalsystem* $(v_i)_{i\in I}$ *ist linear unabhängig.*

Satz 10.17 *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Skalarproduktraum mit induzierter Norm $\|\cdot\|$, $I = \{i \in \mathbb{N} : i \leq m\}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ oder $I = \mathbb{N}$ und $(w_i)_{i\in I} \subseteq V$ linear unabhängig. Dann gibt es ein ONS $(v_i)_{i\in I}$ mit*

$$\forall n \in I: \; Span\{v_1, \dots, v_n\} = Span\{w_1, \dots, w_n\}.$$

$(v_i)_{i\in I}$ kann durch das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren konstruiert werden:

1. Schritt: Sei $v_1 := \frac{1}{\|w_1\|} w_1$.

n-ter Schritt: Sei $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ bereits konstruiert. Dann sei $v_n := \frac{\widetilde{v}_n}{\|\widetilde{v}_n\|}$ mit

$$\widetilde{v}_n := w_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle w_n, v_i\rangle v_i.$$

Insbesondere gilt: Ist V endlich-dimensional, dann besitzt V eine ONB und jedes ONS in V kann zu einer ONB von V ergänzt werden.

Satz 10.18 *Sei* $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein Skalarproduktraum mit induzierter Norm* $\|\cdot\|$ *und endlicher ONB* $\{v_1,\dots,v_n\}$. *Dann gilt:*

(i) $\forall x\in V:\ x=\sum_{i=1}^{n}\langle x,v_i\rangle v_i$

(ii) $u=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i\ \wedge\ v=\sum_{i=1}^{n}\mu_i v_i\ \Rightarrow\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overline{\mu_i}$

(iii) $\forall x\in V:\ \|x\|=\sum_{i=1}^{n}|\langle x,v_i\rangle|^2$ *(Parsevalsche Gleichung)*

Satz 10.19 *Es seien* $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein Skalarproduktraum mit induzierter Norm* $\|\cdot\|$, U *ein endlich-dimensionaler Unterraum von* V, $\{u_1,\dots,u_n\}$ *eine ONB von* U, $x\in V$ *und* $y\in U$. *Dann sind äquivalent:*

(i) $y=\sum_{i=1}^{n}\langle x,u_i\rangle u_i$

(ii) $\exists z\in V: x=y+z\wedge z\perp U$ *(d. h.* $\forall w\in U:\langle z,w\rangle=0$*)*

(iii) $\|x-y\|=\min\{\|x-w\|:w\in U\}$

Die Abbildung $P_U:V\to U,\ x\mapsto\sum_{i=1}^{n}\langle x,u_i\rangle u_i$ *ist linear und heißt orthogonale Projektion von* V *auf* U.

Bemerkung

In der Analysis werden wir sehen, dass die Menge aller stetigen Funktionen von $[0,2\pi]$ nach $\mathbb{R}$ mit der Abbildung $\langle f,g\rangle := \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$ ein Skalarproduktraum ist und $(v_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$v_0 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad v_{2n-1} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx), \quad v_{2n} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)$$

für $n \in \mathbb{N}$, ein ONS in diesem Raum ist.

Dies ist der Anfangspunkt der Theorie der Fourieranalyse.

10.3 Orthogonale und unitäre Abbildungen

Satz 10.20 *Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Skalarproduktraum mit induzierter Norm $\|\cdot\|$ und $L:V\to V$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) Für jedes ONS $\{v_1,\ldots,v_n\}\subseteq V$ ist $\{Lv_1,\ldots,Lv_n\}$ ein ONS.

(ii) L ist isometrisch (längenerhaltend), d. h. $\forall x\in V: \|Lx\|=\|x\|$.

(iii) $\forall x,y\in V: \langle Lx,Ly\rangle=\langle x,y\rangle$. Insbesondere ist L kongruent (längen- und winkelerhaltend).

Definition *Sei V wie in Satz 10.20 und $L:V\to V$ eine lineare Abbildung, welche die äquivalenten Eigenschaften (i)–(iii) aus Satz 10.20 erfüllt.*

a) Ist $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Skalarproduktraum, dann heißt L eine orthogonale Abbildung.

b) Ist $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein komplexer Skalarproduktraum, dann heißt L eine unitäre Abbildung.

Satz 10.21 *Orthogonale und unitäre Abbildungen sind injektiv.*

Satz 10.22 *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein n-dimensionaler reeller bzw. komplexer Skalarproduktraum, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine beliebige ONB von V und $L : V \to V$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) L *ist orthogonal bzw. unitär.*

(ii) $\{Lb_1, \ldots, Lb_n\}$ *ist eine ONB von* V.

(iii) Die Spaltenvektoren von $M_L^{B,B}$ *bilden eine ONB von* $\mathbb{R}^n$ *bzw.* $\mathbb{C}^n$.

(iv) $M_L^{B,B}$ *ist invertierbar mit* $\left(M_L^{B,B}\right)^{-1} = \left(M_L^{B,B}\right)^*$.

(v) Die Zeilenvektoren von $M_L^{B,B}$ *bilden eine ONB von* $\mathbb{R}^n$ *bzw.* $\mathbb{C}^n$.

Definition

a) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *heißt orthogonal, falls* A *invertierbar ist mit* $A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$.

b) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *heißt unitär, falls* A *invertierbar ist mit* $A^{-1} = \overline{A}^{\mathsf{T}}$.

Satz 10.23

1. $O(n) := \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : A^{-1} = A^{\mathsf{T}}\}$ *ist bzgl. der Matrizenmultiplikation eine Gruppe, d. h.* $O(n)$ *ist eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$ *– die sogenannte orthogonale Gruppe.*
2. $U(n) := \{A \in GL(n,\mathbb{C}) : A^{-1} = \overline{A}^{\mathsf{T}}\}$ *ist eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{C})$ *– die sogenannte unitäre Gruppe.*

11 Determinanten

Definition *Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $V = K^n$.*

a) Eine Abbildung $\det : V^n \to K$ *heißt Determinante, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:*

(D1) $\det$ *ist eine Multilinearform, d.h. eine Abbildung von V^n nach K, die linear bzgl. jedes Arguments ist, also für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:*

$$\begin{aligned}\det(a_1, \ldots, a_{k-1}, \alpha\, a_k + b, a_{k+1}, \ldots, a_n) = {} & \alpha \det(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) \\ & + \det(a_1, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n).\end{aligned}$$

(D2) $\det$ *ist alternierend, d.h. für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $j \neq k$ gilt:*

$$\det(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_k, \ldots, a_n) = -\det(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_j, \ldots, a_n).$$

Vertauschen zweier Argumente ändert also das Vorzeichen.

(D3) $\det$ *ist normiert, d.h.*

$$\det(e_1, \ldots, e_n) = 1,$$

wobei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die (geordnete) kanonische Basis von K^n ist.

b) *Sei* $(a_1,\ldots,a_n) \in V^n$. *Dann heißt* $\det(a_1,\ldots,a_n)$ *das orientierte (n-dimensionale) Volumen des von den Vektoren* $a_1,\ldots,a_n$ *aufgespannten Spats und* $|\det(a_1,\ldots,a_n)|$ *das (n-dimensionale) Volumen des von* $a_1,\ldots,a_n$ *aufgespannten Spats. Im Fall* $n=2$ *sagt man auch Flächeninhalt statt 2-dimensionales Volumen und Parallelogramm statt Spat.*

c) *Sei* $A \in K^{n\times n}$ *mit den Zeilenvektoren* $a_1,\ldots,a_n$. *Dann ist* $\det(A) := \det(a_1,\ldots,a_n)$.

Kurzschreibweise: Statt $\det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\right)$ *schreibt man auch* $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Bemerkung

Mit Hilfe der im Folgenden aufgestellten Resultate kann man zeigen, dass es genau eine Determinante mit den Eigenschaften $(D1)$–$(D3)$ gibt (bei vorgegebenen V, K und n).

Satz 11.1 *Sei $A \in K^{n \times n}$ mit den Zeilenvektoren $a_1, \ldots, a_n$. Dann gilt:*

(i) $\exists i \in \{1, \ldots, n\} : a_i = 0 \;\Rightarrow\; \det(A) = 0$.

(ii) Sind zwei Zeilenvektoren von A gleich, dann ist $\det(A) = 0$.

(iii) Addition eines Vielfachen einer Zeile von A zu einer anderen Zeile von A ändert den Wert der Determinante nicht.

Satz 11.2 *Sei $A \in K^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, d. h. A ist von der Form*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Bemerkung
Aufgrund der bisherigen Resultate ist eine Möglichkeit, die Determinante einer beliebigen Matrix zu berechnen, die Folgende. Man formt die Matrix A mit Hilfe des Gauß-Algorithmus zu einer oberen Dreiecksmatrix D um und notiert dabei die Anzahl p der durchgeführten Zeilenvertauschungen. Dann berechnet man mit Satz 11.2 $\det(D)$ und daraus $\det(A) = (-1)^p \det(D)$.

Satz 11.3
Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$. *Dann gilt* $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Satz 11.4 *Sei* $A \in K^{n\times n}$ *Dann ist äquivalent:*

(i) Die Zeilenvektoren von A *sind linear unabhängig.*

(ii) $\det(A) \neq 0$.

Korollar 11.5 *Sei* $A \in K^{n\times n}$. *Dann sind äquivalent:*

(i) $\det(A) \neq 0$.

(ii) Das homogene LGS $Ax = 0$ *besitzt nur die triviale Lösung* $x = 0$.

(iii) Das LGS $Ax = b$ *besitzt für jedes* $b \in K^n$ *genau eine Lösung.*

Satz 11.6 (Determinantenmultiplikationssatz) *Es seien $A, B \in K^{n\times n}$. Dann gilt:*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Bemerkung
Im Allgemeinen gilt aber nicht $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

Korollar 11.7

(i) Sei $A \in K^{n\times n}$ invertierbar. Dann gilt:

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}.$$

(ii) Seien $A, B \in K^{n\times n}$ ähnlich. Dann gilt:

$$\det(A) = \det(B).$$

Definition *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $L : V \to V$ linear. Dann sei*

$$\det(L) := \det(M_L^{B,B}),$$

wobei B eine beliebige (geordnete) Basis von V ist.

Definition *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $L : V \to V$ linear. Dann sei*

$$\det(L) := \det(M_L^{B,B}),$$

wobei B eine beliebige (geordnete) Basis von V ist.

Satz 11.8 *Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann gilt*

$$\det(A^\top) = \det(A).$$

Bemerkung
Aufgrund von Satz 11.8 kann man in den Sätzen 11.1 und 11.4 Zeilen durch Spalten ersetzen, sowie in Satz 11.2 obere Dreiecksmatrizen durch untere Dreiecksmatrizen ersetzen und erhält die selben Schlussfolgerungen.

Korollar 11.9 *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann gilt:*

$$\det(A^*) = \overline{\det(A)}$$

Korollar 11.10 *Sei A eine orthogonale oder unitäre Matrix. Dann ist*

$$|\det(A)| = 1.$$

Satz 11.11 (Entwicklungssatz von Laplace) *Sei* $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ *und* $A_{ij} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ *die Matrix, die aus* A *durch Streichen der* i*-ten Zeile und* j*-ten Spalte entsteht. Dann gilt für jedes* $i \in \{1,\ldots,n\}$*:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \quad \textit{(Entwicklung nach der i-ten Zeile).}$$

Korollar 11.12 *Seien* A, A_{ij} *wie in Satz 11.11. Dann gilt für jedes* $j \in \{1,\ldots,n\}$*:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \quad \textit{(Entwicklung nach j-ter Spalte).}$$

Korollar 11.13
Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$*. Dann gilt:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Zur geometrischen Bedeutung der Determinante:

Satz 11.14 *Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und bijektiv. Dann wird jeder Spat mit n-dimensionalem Volumen V durch L auf einen Spat mit n-dimensionalem Volumen $|det L| V$ abgebildet.*

Bemerkung

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Aufgrund von Satz 11.3 und der Definition des Vektorproduktes gilt

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \det(A) \end{pmatrix}$$

und somit

$$\left\| \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = |\det(A)|$$

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Aufgrund von Korollar 11.12, Satz 11.3 und der Definition des Spatproduktes gilt

$$\left[\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right] = \det(A),$$

also

$$\left| \left[\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right] \right| = |\det(A)|$$

Die Definition des Flächeninhalts von Parallelogrammen bzw. des Volumens von Spaten mit Hilfe von Determinanten stimmen also im $\mathbb{R}^2$ bzw. im $\mathbb{R}^3$ mit den entsprechenden Definitionen aus Abschnitt 8.1 überein.

Definition *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

a) Zwei geordnete Basen B und B' von V heißen gleich orientiert, falls $det(M_{Id}^{B',B}) > 0$ ist.

b) Ein Isomorphismus $L : V \to V$ heißt orientierungserhaltend, falls $det(L) > 0$ ist.

Satz 11.15

(i) $SL(n,K) := \{A \in GL(n,K) : det(A) = 1\}$ *ist eine Untergruppe von* $GL(n,K)-$ *die sogenannte spezielle lineare Gruppe.*

(ii) $SO(n) := O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$ *ist sowohl eine Untergruppe von* $O(n)$ *als auch eine Untergruppe von* $SL(n,\mathbb{R})-$ *die sogenannte spezielle orthogonale Gruppe.*

(iii) $SU(n) := U(n) \cap SL(n,\mathbb{C})$ *ist sowohl eine Untergruppe von* $U(n)$ *als auch eine Untergruppe von* $SL(n,\mathbb{C})-$*die sogenannte spezielle unitäre Gruppe.*

Satz 11.16

(i) $SO(2) = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \exists \varphi \in \mathbb{R} :\ A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\right\}$,

(ii) $O(2) \setminus SO(2) = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \exists \varphi \in \mathbb{R} :\ A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\right\}$.

Bemerkungen

1) Matrizen aus $SL(n,\mathbb{R})$ bzw., genauer gesagt, die durch diese Matrizen dargestellten linearen Abbildungen beschreiben volumen- und orientierungserhaltende lineare Abbildungen auf $\mathbb{R}^n$.

2) Matrizen aus $O(n)$ beschreiben längen- und winkelerhaltende (und somit auch volumenerhaltende) lineare Abbildungen auf $\mathbb{R}^n$.

3) Matrizen aus $SO(n)$ beschreiben orientierungserhaltende und längen- und winkelerhaltende (und somit auch volumenerhaltende) lineare Abbildungen auf $\mathbb{R}^n$.

4) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ beschreibt eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ mit Drehwinkel φ.

5) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ beschreibt eine Achsenspiegelung im $\mathbb{R}^2$, wobei $\frac{1}{2}\varphi$ der Winkel zwischen der x_1-Achse und der Spiegelachse ist.

Bemerkung

Alternativ zu der in diesem Abschnitt vorgestellten Vorgehensweise gibt es auch die folgende Möglichkeit, Determinanten einzuführen. Für $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ definiert man

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) \prod_{i=1} a_{i\sigma(i)}$$

Dabei ist S_n die Gruppe aller bijektiven Abbildungen auf $\{i \in \mathbb{N} : i \leq n\}$ und $sign(\sigma)$ (Signum von σ) ist $\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right\}$, falls sich σ als Verkettung einer $\left\{ \begin{array}{c} \text{geraden} \\ \text{ungeraden} \end{array} \right\}$ Anzahl von Transpositionen (Vertauschung von jeweils zwei Zahlen) darstellen lässt. (Man kann zeigen, dass solche Darstellungen immer möglich sind und $sign(\sigma)$ für jede mögliche Darstellung von σ den gleichen Wert annimmt).

Man kann dann die Resultate aus diesem Abschnitt auch mit Hilfe dieser alternativen Determinantendefinition herleiten sowie die Äquivalenz der beiden Determinantendefinitionen beweisen.

12 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei weiterhin $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition

a) *Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $L : V \to V$ linear. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert von L, falls ein $v \in V \setminus \{0\}$ existiert mit*

$$Lv = \lambda v\,.$$

Der Vektor v heißt dann Eigenvektor von L zum Eigenwert λ. Die Menge $\sigma(L) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda$ ist Eigenwert von $L\}$ heißt Spektrum von L.

b) *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert von A, falls ein $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ existiert mit*

$$Ax = \lambda x\,.$$

Der Vektor x heißt dann Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Die Menge $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda$ ist Eigenwert von $A\}$ heißt Spektrum von A.

Satz 12.1

a) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $L: V \to V$ linear. Dann gilt:
$\lambda \in \mathbb{K}$ ist Eigenwert von L und $v \in V \setminus \{0\}$ ist Eigenvektor von L zum Eigenwert λ
$\Leftrightarrow v \in Kern(L - \lambda Id) \setminus \{0\}$

b) Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann gilt:
$\lambda \in \mathbb{K}$ ist Eigenwert von A und $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert λ
$\Leftrightarrow x \in Kern(A - \lambda E_n) \setminus \{0\}$

Korollar 12.2 *Seien V, L und A wie in 12.1, $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von L und $\mu \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A. Dann gilt:*

$$Eig_\lambda(L) := \{v \in V : \lambda v\}$$

und

$$Eig_\mu(A) := \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = \mu x\}$$

sind Untervektorräume von V bzw. $\mathbb{K}^n$ mit Dimension ≥ 1, genannt der Eigenraum von L zum Eigenwert λ bzw. der Eigenraum von A zum Eigenwert μ.

Bemerkung
Da lineare Abbildungen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen durch Matrizen dargestellt werden können, genügt es in diesem Fall, Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume von Matrizen zu untersuchen.

Satz 12.3 *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt:*

a) λ *ist Eigenwert von* $A \Leftrightarrow det(A-\lambda E_n) = 0$

b) Die Funktion $\chi_A : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\lambda \mapsto det(A-\lambda E_n)$ *ist ein Polynom n-ten Grades, das sogenannte charakteristische Polynom von* A*, und es gilt:*
λ *ist Eigenwert von* $A \Leftrightarrow \lambda$ *ist Nullstelle von* χ_A.

Korollar 12.4 *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt:*

a) A *hat höchstens n verschiedene Eigenwerte.*

b) A *mindestens einen komplexen Eigenwert. Dieser Eigenwert kann reell sein, muss aber nicht, selbst wenn* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *ist.*

c) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n} \subseteq \mathbb{C}^{n\times n}$ *und* $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ *Eigenwert von* A*, dann ist auch* $\overline{\lambda}$ *Eigenwert von* A.

Definition *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und λ Eigenwert von A. Dann heißt:*

- *die Vielfachheit der Nullstelle λ von χ_A die algebraische Vielfachheit von λ, bezeichnet mit $n_a(\lambda)$,*
- *$n_g(\lambda) := dim\, Eig_\lambda(A)$ die geometrische Vielfachheit von λ.*

Satz 12.5 *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n} \subseteq \mathbb{C}^{n\times n}$ und $x \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist $\overline{x}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.*

Satz 12.6 *Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt:*

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}Sp(A)\lambda^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} c_k\lambda^k + det(A)$$

mit $c_k \in \mathbb{K}$ und $Sp(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (die sogenannte Spur von A).

Korollar 12.7 *Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die (paarweise verschiedenen) Eigenwerte von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt:*

(i) $\prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{n_a(\lambda_i)} = det(A)$

(ii) $\sum_{i=1}^{k} n_a(\lambda_i)\,\lambda_i = Sp(A)$

Satz 12.8 *Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ähnlich. Dann gilt: $\chi_A = \chi_B$.*

Korollar 12.9 *Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ähnlich. Dann gilt:*

(i) $Sp(A) = Sp(B)$

(ii) λ ist Eigenwert von A mit $n_a(\lambda) = k \Leftrightarrow \lambda$ ist Eigenwert von B mit $n_a(\lambda) = k$

(iii) Sei $S \in GL\,(n, \mathbb{K})$ mit $B = S^{-1}AS$ und x Eigenvektor von A zum Eigenwert λ mit $n_g(\lambda) = m$. Dann ist $S^{-1}x$ Eigenvektor von B zum Eigenwert λ und es ist $n_g(\lambda) = m$ (als Eigenwert von B).

Korollar 12.10 *Sei λ_i Eigenwert von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt $n_g(\lambda_i) \leq n_a(\lambda_i)$.*

Satz 12.11 *Sei* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *und* $S \in GL(n,\mathbb{K})$ *mit den Spaltenvektoren* s_j*,* $j = 1,\ldots,n$*. Dann ist äquivalent:*

(i) $\{s_j : j = 1,\ldots n\}$ *ist eine Basis von* $\mathbb{K}^n$ *aus Eigenvektoren von* A*.*

(ii) $D = (d_{ij})$ *mit* $D = S^{-1}AS$ *ist eine Diagonalmatrix.*

Gelten die äquivalenten Aussagen (i) *und* (ii)*, dann ist* $A_{s_j} = d_{jj}s_j$*,* $j = 1,\ldots,n$*, und* $\{d_{jj} : j = 1,\ldots,n\} = \sigma(A)$*.*

Korollar 12.12 *Sei* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$*. Dann ist äquivalent:*

(i) $\mathbb{K}^n$ *besitzt eine Basis aus Eigenvektoren von* A*.*

(ii) A *ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix* $D = (d_{ij})$*.*

Definition $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *heißt diagonalisierbar, falls die äquivalenten Eigenschaften* $(i),(ii)$ *aus 12.11 erfüllt sind.*

Satz 12.13 *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann ist äquivalent:*

(i) A ist diagonalisierbar

(ii) χ_A zerfällt über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren und für jede Nullstelle λ_i von χ_A gilt:

$$n_g(\lambda_i) = n_a(\lambda_i).$$

Satz 12.14 *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $L : V \to V$ linear und $\lambda_i, \ldots, \lambda_k$ paarweise veschiedene Eigenwerte von L mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \ldots v_k$. Dann ist $\{v_1, \ldots v_k\}$ linear unabhängig. Also sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig.*

Satz 12.15 *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert. Dann gilt:*

(i) $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$

(ii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A sind orthogonal zueinander.

Satz 12.16 *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert. Dann existiert eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A.*

Korollar 12.17 *a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Dann existiert eine orthogonale Matrix S, so dass $S^T AS$ eine Diagonalmatrix ist.*

b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch. Dann existiert eine Matrix S, so dass $\bar{S}^T AS$ eine Diagonalmatrix ist, die in $\mathbb{R}^{n\times n}$ enthalten ist.

Bemerkung

Koordinatentransformationen, die symmetrische Matrizen mit Hilfe von orthogonalen Matrizen zu Diagonalmatrizen transformieren, nennt man auch Hauptachsentransformationen.

Korollar 12.18 *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert. Dann gilt :*

$$A \text{ ist } \begin{cases} \textit{positiv definit} \\ \textit{positiv semidefinit} \\ \textit{negativ definit} \\ \textit{negativ semidefinit} \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}(A) \subseteq \begin{cases} \mathbb{R}^+ \\ \mathbb{R}_0^+ \\ \mathbb{R}^- \\ \mathbb{R}_0^- \end{cases}$$

Bemerkung

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann ist $\frac{1}{2}(A+A^T) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und für die quadratische Form $q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \;\; x \longmapsto x^T A x$ gilt

$$q_A(x) = \langle x, Ax\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x, \frac{1}{2}(A+A^T)x\rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Ist $\{b_1,\dots b_n\}$ eine ONB von $\mathbb{R}^n$ aus EV von $\frac{1}{2}(A+A^T), \frac{1}{2}(A+A^T)b_i = \lambda_i b_i$ und $x = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i b_i$, dann gilt:

$$q_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{x}_i^2.$$

Bemerkung

Es gibt verschiedene Verallgemeinerungen von Satz 12.16. Für Details sei auf die Literatur verwiesen.

Satz 12.19 *Sei* $A \in SO(3)$*. Dann gilt:*

(i) $1 \in \sigma(A)$

(ii) *Für jede ONB* $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ *von* $\mathbb{R}^3$ *mit* $Ab_1 = b_1$ *existiert genau ein* $\varphi \in]-\pi, \pi]$ *mit* $|\varphi| = \arccos(\frac{1}{2}(Sp(A) - 1))$, *so dass*

$$M_{L_A}^{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \textit{ist.}$$

Bemerkung

Für weitere Resultate bzgl. Eigenwerten und Eigenvektoren von Matrizen aus $SO(n), O(n), SU(n), U(n)$ sei auf die Literatur verwiesen.

Definition *Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Die Matrix*

$$J(k,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{k\times k}$$

heißt Jordan-Matrix oder Jordan-Block.

Satz 12.20 *Für eine Jordan-Matrix $J(k,\lambda)$ gelten:*

(i) λ ist einziger EW von $J(k,\lambda)$.

(ii) $n_a(\lambda) = k$ und $n_g(\lambda) = 1$.
Insbesondere ist $J(k,\lambda)$ für $k \geq 2$ nicht diagonalisierbar.

(iii) Die Matrix $J(k,\lambda) - \lambda E_k$ ist nilpotent, d.h.
$\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq m \ \Rightarrow\ (J(k,\lambda) - \lambda E_k)^n = 0,$
und es gilt $m = k$.

Satz 12.21 *Sei* $k \geq 2$, *B eine Basis von* $\mathbb{K}^k$ *und* $A \in \mathbb{K}^{k \times k}$ *eine Matrix, die nur einen EW* λ *besitzt und für den gilt:* $n_a(\lambda) = k$ *und* $n_g(\lambda) = 1$.
Dann ist äquivalent:

(i) $M_{L_A}^{B,B} = J(k, \lambda)$.

(ii) $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ *mit* $(A - \lambda E_k)b_1 = 0$ *und*
$\forall j \in \{1, 2, \ldots, k-1\} : (A - \lambda E_k)b_{j+1} = b_j$.

Definition *Sei* $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ *und* λ *ein EW von A mit* $n_a(\lambda) = m$. *Dann heißt*

$$H_\lambda(A) := Kern((A - \lambda E_n)^m)$$

der Hauptraum von A zum EW λ *und die Elemente aus* $H_\lambda(A)$ *heißen Hauptvektoren von A zum EW* λ.

Satz 12.22 (Jordansche Normalform) *Sei* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *und* $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda_i - \lambda)^{k_i}$ *mit* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *für* $i \neq j$. *Dann existiert eine Basis B von* $\mathbb{K}^n$ *aus Hauptvektoren von A, so dass*

$$M_{L_A}^{B,B} = \begin{pmatrix} J(k_{11},\lambda_1) & & & \dots & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & J(k_{1l_1},\lambda_1) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & J(k_{m1},\lambda_m) & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & & & & J(k_{ml_m},\lambda_m) \end{pmatrix}$$

ist, wobei $\sum_{j=1}^{l_i} k_{ij} = k_i = n_a(\lambda_i)$ *und* $l_i = n_g(\lambda_i)$ *ist.*

$M_{L_A}^{B,B}$ *heißt dann Jordansche Normalform von A.*

Teil III
Eindimensionale Analysis

13 Konvergenz

Definition

a) *Eine reellwertige Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt konvergent gegen* $a \in \mathbb{R}$, *falls gilt*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > n_\varepsilon : | \, a_n - a \, | < \varepsilon \qquad (K)$$

Man sagt dann auch " $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* a *" oder*
" a *ist Grenzwert (Limes) von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *".*
Kurzschreibweisen : $a_n \to a$ *für* $n \to \infty$ *oder* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

b) *Eine reellwertige Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt Nullfolge.*

c) *Eine reellwertige Folge, die keinen Grenzwert besitzt, heißt divergent.*

Satz 13.1 *a) Jede konvergente Folge hat genau einen Grenzwert.*

b) Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist beschränkt, d.h.*

$$\exists C>0\ \forall n\in\mathbb{N}:\ |a_n|<C$$

c) Verändert man endlich viele Folgeglieder einer konvergenten Folge, dann hat die dadurch entstandene Folge denselben Grenzwert wie die ursprüngliche.

Satz 13.2 *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$*. Dann gilt:*

(i) $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}:\ \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha a+\beta b$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n)=ab$

(iii) $(b\neq 0\ \wedge\ \forall n\in\mathbb{N}:\ b_n\neq 0)\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a}{b}$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$

(v) $\forall m\in\mathbb{N}:\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n^m=a^m$

(vi) $(a\geq 0\ \wedge\ \forall n\in\mathbb{N}:\ a_n\geq 0)\ \Rightarrow\ \forall m\in\mathbb{N}:\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[m]{a_n}=\sqrt[m]{a}$

Satz 13.3 *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen und*

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : a_n \leq b_n\,,$$

dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

Bemerkung
Ersetzt man in den Voraussetzungen von Satz 13.3 $a_n \leq b_n$ durch $a_n < b_n$, dann kann aber im Allgemeinen nicht

$$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$$

gefolgert werden, sondern auch nur

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n\,,$$

wie das Beispiel $a_n = 0$ und $b_n = \frac{1}{n}$ zeigt.

Korollar 13.4 *("Sandwich-Satz", "Dreifolgensatz", "Prinzip der Polizisten") Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reellwertige Folgen. Gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

und

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : a_n \leq b_n \leq c_n,$$

dann ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

Definition *Eine reellwertige Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt*

a) monoton wachsend, falls gilt $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$,

b) streng monoton wachsend, falls gilt $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$,

c) monoton fallend, falls gilt $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$,

d) streng monoton fallend, falls gilt $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$,

e) nach oben beschränkt, falls gilt $\exists C \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq C$,

f) nach unten beschränkt, falls gilt $\exists C \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq C$.

Satz 13.5 *Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} .$$

Korollar 13.6 *Jede monoton fallende, nach unten beschränkte reelle Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} .$$

Definition *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reellwertige Folgen. Die Menge* $\{[a_n, b_n] : n \in \mathbb{N}\}$ *heißt Intervallschachtelung, falls gilt:*

$$(i)\ \forall n \in \mathbb{N} : [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]\,,$$
$$(ii)\ \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Korollar 13.7 *Sei* $\{[a_n, b_n] : n \in \mathbb{N}\}$ *eine Intervallschachtelung. Dann*

$$\exists! x \in \mathbb{R} : \{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$$

und es gilt

$$x = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Definition

a) *Sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge und* $k \to n_k$ *eine streng monoton wachsende Abbildung von* $\mathbb{N}$ *nach* $\mathbb{N}$. *Dann heißt* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Teilfolge von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) *Der Grenzwert einer jeden konvergenten Teilfolge von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt ein Häufungspunkt von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) *Besitzt eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *einen größten Häufungspunkt* x, *dann heißt er Limes superior von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Bezeichnung: $x = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

d) *Besitzt eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *einen kleinsten Häufungspunkt* x, *dann heißt er Limes inferior von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Bezeichnung: $x = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Satz 13.8 *Sei* x *der Grenzwert einer Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Dann konvergiert auch jede Teilfolge von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* x.

Satz 13.9 (Satz von Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{R}$ *besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Definition *Eine reellwertige Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt Cauchy-Folge, falls gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall m,n > n_\varepsilon : |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Satz 13.10 *a) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

b) Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.

c) Enthält eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Teifolge* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = x$*, dann gilt auch* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$*.*

Satz 13.11 $\mathbb{R}$ *ist vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge in* $\mathbb{R}$ *hat eine Grenzwert in* $\mathbb{R}$*.*

Bemerkungen

1) Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist letztendlich eine Folgerung von Satz 13.5 und damit eine Konsequenz des Supremumsaxioms, siehe den Beweis von 13.5. Alternativ kann man auch die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ als Axiom postulieren und daraus die Gültigkeit des Supremumsaxioms beweisen.

2) $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig, denn es gibt Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$, deren jeweilige Grenzwerte in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegen.

3) Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist ein grenzwertfreies Konvergenzkriterium, denn damit kann man für diejenigen Cauchy-Folgen, bei denen man den Grenzwert nicht explizit berechnen kann, immerhin deren Konvergenz nachweisen.

Satz 13.12 *Sei* $x \in \mathbb{R}$ *und* $m = \min\{n \in \mathbb{N} : n > -x\}$.

1. *Die Folge* $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist ab dem* m*-ten Folgenglied monoton wachsend.*
2. *Die Folge* $\left(\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$*, definiert für* $n \geq m$*, ist monoton fallend.*
3. $\left\{\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}\right] : n \in \mathbb{N} \wedge n > |x|\right\}$ *ist eine Intervallschachtelung und somit existiert*
$$e^x := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

Satz 13.13 *(i)* $e^0 = 1$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0$

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R} : e^{x+y} = e^x e^y$

(iv) $\forall x \in \mathbb{R} : e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

(v) $\forall x \in \mathbb{Q} : e^x = (e^1)^x$, *wobei* $(e^1)^x$ *die* x*-te Potenz von* (e^1) *ist.*
Daher definiert man $e := e^1$ *(Eulersche Zahl).*

(vi) $e = 2,718281828459045\ldots$

(vii) $\forall x \in \mathbb{R} : e^x \geq 1 + x \wedge (e^x = 1 + x \Leftrightarrow x = 0)$

(viii) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \implies e^x < e^y$

(ix) $\forall x \in \mathbb{R} : |x| < 1 \implies |e^x - 1| \leq \dfrac{|x|}{1 - |x|}$

(x) $\lim\limits_{n \to \infty} e^{\frac{1}{n}} = 1 = \lim\limits_{n \to \infty} e^{-\frac{1}{n}}$.

(xi) $\forall m \in \mathbb{N}_0 : \lim\limits_{n \to \infty} n^m e^{-n} = 0$.

Satz 13.14 *(i) Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto e^x$ *ist bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt natürlicher Logarithmus* $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$.

(ii) $\ln 1 = 0$

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ : x < y \implies \ln x < \ln y$

(iv) $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \ln(ab) = \ln a + \ln b$.

(v) $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

(vi) $\forall a \in \mathbb{R}^+ \forall n \in \mathbb{N} : \ln a^n = n \cdot \ln a$

(vii) $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \ln x \leq x - 1 \wedge (\ln x = x - 1 \Leftrightarrow x = 1)$

(viii) $\forall m \in \mathbb{N} : \lim_{n \to \infty} n^{-\frac{1}{m}} \ln n = 0$

(ix) $\forall a \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{Q} : a^x = e^{x \cdot \ln a}$

Definition (Reelle Potenzen) *Für $a \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $a^x := e^{x \cdot \ln a}$.*

Satz 13.15 *1.* $\forall a \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in \mathbb{R} : a^{x+y} = a^x a^y$

2. $\forall a \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in \mathbb{R} : (a^x)^y = a^{xy}$

3. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R} : (ab)^x = a^x b^x$

4. Sei $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Dann ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto a^x$ streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt Logarithmus zur Basis a, in Zeichen: $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_a x$.

5. $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \forall x \in \mathbb{R}^+ : \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Definition

1. *Eine komplexwertige Folge* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt konvergent gegen* $z \in \mathbb{C}$, *in Zeichen:* $z_n \to z$ *für* $n \to \infty$ *oder* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, *falls* $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$ *gilt.*
2. *Eine komplexwertige Folge* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt Cauchy-Folge, falls gilt*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \, \forall m, n > n_\varepsilon : |z_m - z_n| < \varepsilon$$

Satz 13.16 *Seien* $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathbb{N}$ *und* $z = x + iy$ *mit* $x, x_n, y, y_n \in \mathbb{R}$. *Dann gilt:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \wedge \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$
2. $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist Cauchy-Folge* $\iff$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sind Cauchy-Folgen.*

Satz 13.17 *Für komplexwertige Folgen gelten:*

1. *die Aussagen aus Satz 13.1.*
2. *die Aussagen aus Satz 13.2 (i)-(v), wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sein darf.*
3. $\lim_{n\to\infty} z_n = z \implies \lim_{n\to\infty} \overline{z_n} = \overline{z}$.
4. $\left((\exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |z_n| \leq C) \wedge \lim_{n\to\infty} z_n = z \right) \implies |z| \leq C$.
5. *die Aussage aus 13.8.*
6. *die Aussage aus 13.9 für $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$.*
7. *die Aussagen aus 13.10.*
8. *die Aussage aus 13.11 für $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$.*