PD Dr. W. Düll
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Mathematik für Informatik und Softwaretechnik

Klausur **22. 08. 2014**

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
inf, swt

Bitte unbedingt beachten:

- Legen Sie Ihren Studentenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Taschenrechner, Mobiltelefone etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 eigenhändig beschriebene DIN-A4 Seiten.
- Bei den **Aufgaben 4-7** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht!
- Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer und Nummer der bearbeiteten Aufgabe.
- In dieser Klausur können bis zu **50 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1+4 Punkte):

a) Bestimmen Sie zu $w = -3 + 3i$ die Polarkoordinatendarstellung $w = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ mit $r \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.

$r = \boxed{}$, $\varphi = \boxed{}$.

b) Geben Sie alle Lösungen von $z^4 = 16\left(\cos(\frac{2}{3}\pi) + i\sin(\frac{2}{3}\pi)\right)$ in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an. **Hinweis:** $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$z_1 = \boxed{}$, $z_2 = \boxed{}$,

$z_3 = \boxed{}$, $z_4 = \boxed{}$.

Aufgabe 2 (1+6+1 Punkte): Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A an:

$\chi_A(\lambda) = \boxed{}$.

b) Geben Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2, λ_3 der Matrix A und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor v_1, v_2, v_3 an:

$\lambda_1 = \boxed{}$, $\lambda_2 = \boxed{}$, $\lambda_3 = \boxed{}$,

$v_1 = \boxed{}$, $v_2 = \boxed{}$, $v_3 = \boxed{}$.

c) Geben Sie eine Matrix S an, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist:

$S = \boxed{}$.

Aufgabe 3 (2+2+2+6 Punkte): Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - x^2y + 3y^2 - y^3 + 4\,.$$

a) Geben Sie den Gradienten von f an und geben Sie außerdem denjenigen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$ an, für den die Richtungsableitung $\partial_v f(0, 1)$ den größten Wert annimmt.

$\nabla f(x, y) =$ $\boxed{}$, $\qquad v =$ $\boxed{}$.

b) Geben Sie alle stationären Punkte von f an.

$P_1 =$ $\boxed{}$, $\quad P_2 =$ $\boxed{}$, $\quad P_3 =$ $\boxed{}$, $\quad P_4 =$ $\boxed{}$.

c) Geben Sie die Hesse-Matrix von f an.

$\mathrm{H}f(x, y) =$ $\boxed{}$

d) Geben Sie für jeden stationären Punkt von f seinen Typ an, sowie auch ein mathematisches Kriterium (eine mathematische Begründung) für Ihre Entscheidung.

stationärer Punkt	Kriterium für den Typ	Typ
P_1		
P_2		
P_3		
P_4		

Aufgabe 4 (4+2 Punkte): Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die zu A inverse Matrix A^{-1}.

b) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

sowie der Vektor

$$v = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Urbild $L^{-1}v$.

Aufgabe 5 (2+5 Punkte):

a) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x \cos(x)}$$

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3} (x-3)^n$$

konvergiert.

Aufgabe 6 (2+3 Punkte): Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{a)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2\sin x} \, \mathrm{d}x \qquad \text{b)} \int_0^{\infty} x \, e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

Aufgabe 7 (7 Punkte): Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) - 2\,y'(x) + y(x) = 0, \qquad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 2.$$