

1 Man beweise die folgenden Identitäten.

a. $\cos 2u = 2 \cos^2 u - 1 = 1 - 2 \sin^2 u$

b. $\tan u = \frac{1 - \cos 2u}{\sin 2u} = \frac{\sin 2u}{1 + \cos 2u}$

2 Es gilt

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(n + 1/2)x}{2 \sin x/2}.$$

Hinweis: Stellen sie die linke Seite als geometrische Summe dar.

3 Für $t \in \mathbb{R}$ bestimme man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t), \quad f_n(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\cos(n! \pi t))^{2k}.$$

Hinweis: Man unterscheide $t \in \mathbb{Q}$ und $t \notin \mathbb{Q}$.

4 Für $t \in \mathbb{R}$ und $n \geq 1$ sei $z_n = e^{it/n}$ und

$$L_n(t) = \sum_{k=1}^n |z_n^k - z_n^{k-1}|$$

die Länge des Polygonzugs $z_n^0, z_n^1, \dots, z_n^n$ auf dem Einheitskreis. Dann gilt

$$L_n(t) = 2n |\sin(t/2n)| \rightarrow |t|, \quad n \rightarrow \infty.$$

Die Länge des Polygonzugs konvergiert also gegen die Länge des Kreisbogens vom Punkt 1 bis zum Punkt e^{it} .

5 Man zeige, dass $\sin 1$ und $\cos 1$ irrational sind.

6 *Tschebyschev-Polynome* Für jedes $n \geq 1$ gibt es ein Polynom T_n vom Grad n , so dass

$$T_n(\cos t) = \cos nt.$$

Dieses Polynom heißt *Tschebyschev-Polynom* vom Grad n .

a. Man zeige, dass es solche Polynome gibt, und dass

$$T_0 = 1, \quad T_1(t) = t.$$

b. Es gilt die Rekursionsformel

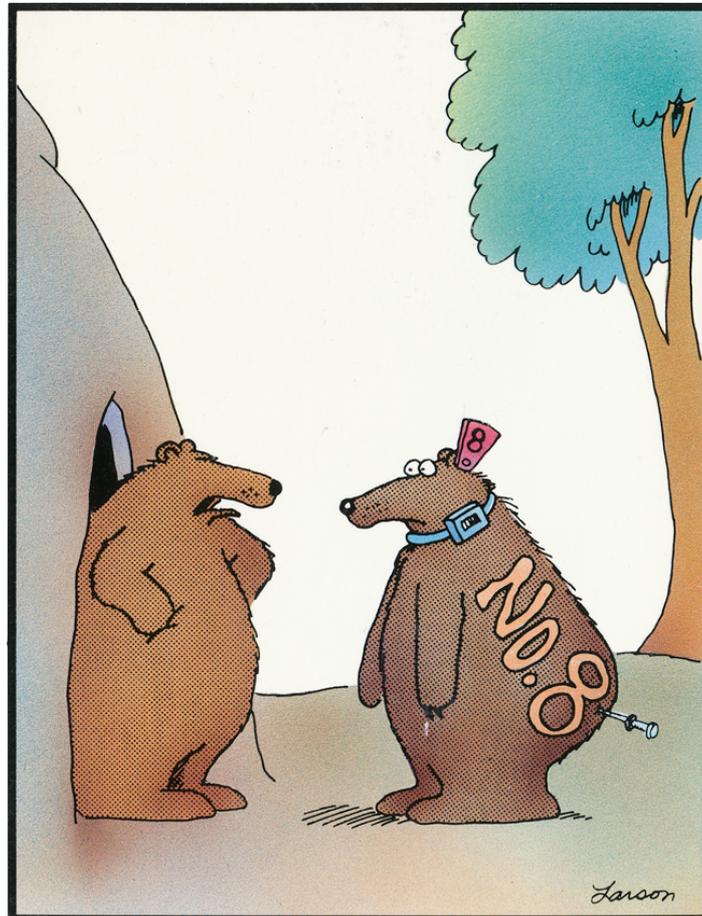
$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \quad n \geq 1.$$

c. Man berechne damit T_2, \dots, T_5 .

d. In $[-1, 1]$ hat T_n die Nullstellen

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, \dots, n,$$

und die Extremalstellen $c_k = \cos k\pi/n$, $k = 0, 1, \dots, n$.



"Late again! . . . This better be good!"