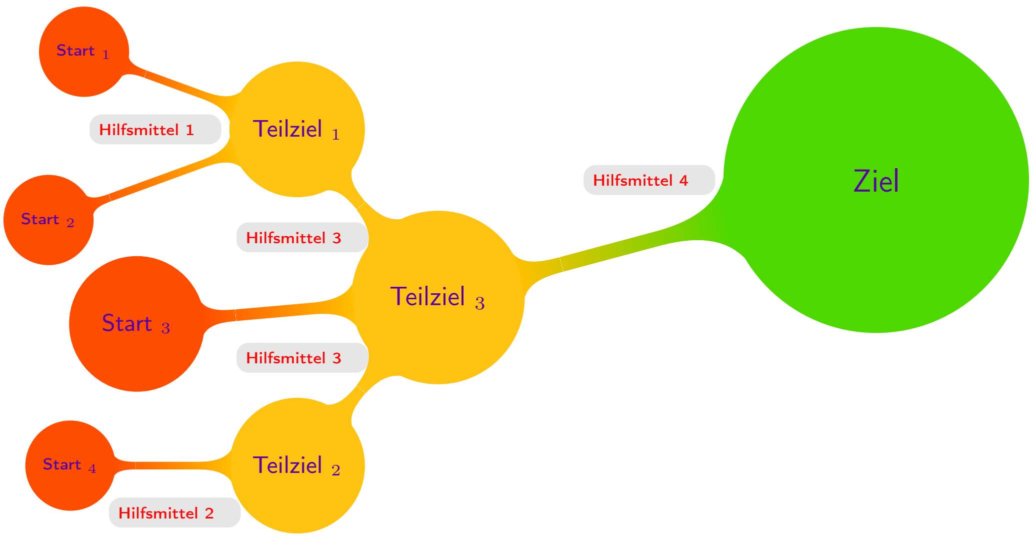
1 Was ist und was soll dieses Arbeitsmaterial?

Hier soll das Lösen von Aufgaben und insbesondere das Darstellen von Lösungen thematisiert werden. Unser Ziel ist dabei also zweifach zu sehen. Einerseits interessieren wir uns für Strategien mit denen wir Lösungen problembehafteter Aufgaben finden können. Dies allein reicht aber nicht, um andere von der eigenen Lösung zu überzeugen. Hier bedarf es einer Darstellungsform, die neben den Ergebnissen insbesondere einen Lösungsweg und seine logische Struktur wiedergibt.

1.1 Aufgaben, theoretisch betrachtet

Jede Aufgabe enthält Informationen über ihre **Startgrößen** und ihre **Zielgröße**. Eine Aufgabe zu lösen heißt, auf irgendeine Weise irgendeinen (logisch konsistenten und mit bekannten Aussagen begründbaren) Weg von ihren Startgrößen zu ihrer Zielgröße zu finden. Dieser Weg führt oft über **Teilziele**, die mit Hilfe von **Hilfsmitteln** erreicht werden.

Lösungen einer Aufgabe können damit (zumindes prinzipiell) in Form eines **Lösungsgraphen** festgehalten werden. Dargestellt sind dabei die Startgrößen S_i, die Teilziele T_i und die Zielgröße Z als Knoten, die genutzten Hilfsmittel und logischen Argumente als Kanten und Verknünpfungen. Schematisch könnte das also wie folgt aussehen:



Allerdings wird das für praktische Lösungsdarstellungen relativ schnell unhandlich. Es stellt sich die Frage, wie man Lösungen findet und wie man diese dann möglichst gut darstellt. Das ist nicht nur Selbstzweck – Darstellen dient insbesondere dem eigenen Verstehen.

1.2 Aufgabentypen

Wir unterscheiden zwischen zwei Grundtypen, den **Beweisaufgaben** und den **Bestimmungsaufgaben**. Diese unterscheiden sich in der Art der Start- und Zielgrößen. Bei Bestimmungsaufgaben suchen wir in der Regel nach Zahlen oder geometrischen Figuren, die gewisse Eigenschaften besitzen. Bei Beweisaufgaben suchen wir nach logischen Schlüssen, welche gegebene Aussagen mit einer zu folgernden Aussage in Beziehung setzen.

	Startgrößen	**Ziel**	**Teilziele**	**Hilfsmittel**
Bestimmungsaufgaben				
Rechenaufgaben	Ausdruck	Zahl	—	Rechenregeln
Gleichungslösen	Gleichungen	Lösungsmenge	Gleichungen	Rechenregeln zum Umformen
Konstruktionsaufgaben	Punkte, Geraden oder Kreise	Punkte, Geraden oder Kreise	Punkte, Geraden oder Kreise	geometrische Ortsaussagen
Kombinatorik	Charakterisierung einer Menge	Elementanzahl	Anzahlen von Hilfsobjekten	Umformulierungen
Beweisaufgaben	Voraussetzungen	Behauptung	Hilfsaussagen	Axiome, Sätze

Beweisaufgaben wirken dabei auf den ersten Blick abstrakter, sind aber bei genauem Nachdenken einfacher als Bestimmungsaufgaben. Bestimmungsaufgaben enthalten oft mehrere zu führende Beweise. Das wollen wir uns im Weiteren genauer anschauen.

1.3 Was zeichnet eine gute Aufgabe aus?

Das ist sicher individuell, aber einige allgemeine Eigenschaften haben gute Aufgaben gemeinsam. Gute Aufgaben sollten Lust auf mehr machen. Aber wie geht das? Und, sie sollten anregen, Anderen von der eigenen Lösung zu erzählen. Hier ein Beispiel, die Aufgabe ist alt und stammt aus der Antike:

> *Da Josephus auch in der bedrängtesten Lage seine Geistesgegenwart nie verlor, so wollte er jetzt im Vertrauen auf den Schutz Gottes im eigentlichen Sinne ein Spiel um sein Leben wagen und machte folgenden Vorschlag: „Weil es nun einmal beschlossene Sache ist, dass wir jetzt sterben, wohlan, so werden wir das Los entscheiden lassen, wer jedesmal Opfer und Henker sein soll. Derjenige nämlich, welcher zuerst vom Lose betroffen wird, soll immer von dem, der nach ihm herausgelost wird, niedergestoßen werden. So werden dann alle und zwar nur nach des Schicksals Fügung an die Reihe kommen, und wird niemand die Gewalt über sein Leben in der eigenen Hand haben, da es nicht in der Ordnung wäre, wenn ein und der andere nach dem Hingang seiner Gefährten am Ende seinen Entschluss wieder bereuen und am Leben bleiben würde.“ Diese Worte fanden das vollste Vertrauen und die vollste Zustimmung bei den Genossen, mit denen nun auch Josephus losen musste. Der erste, den jeweilig das Los traf, stellte sich immer willig dem Schwerte des nach ihm herausgelosten Gefährten: wusste er ja doch, dass auch sein Feldherr gleich darauf sterben werde, mit dem zu sterben ihm süßer war, als begnadigt zu werden. So blieb nur mehr Josephus mit einem zweiten übrig – ob man es nun als Zufall oder als Fügung Gottes zu bezeichnen hat. Da Josephus aber ebensowenig Lust spürte, ein Opfer des Todesloses zu werden, als, im Falle er das letzte Los zöge, seine Hand in das Blut eines Volksgenossen zu tauchen, so brachte er, um beides zu verhindern, den letzteren dahin, dass er die zugesicherte Gnade wirklich annahm. (Josephus Flavius: Der jüdische Krieg. Buch III Kapitel 8.7)*
>
> *Um die Aufgabe zu präzisieren und klarzustellen: Wir lassen Josephus und die weiteren 39 Personen sich im Kreis aufstellen. Dabei ist eine erste Position und Richtung festgelegt. Reihum wird jeder Dritte sterben, dies wird fortgesetzt bis nur die letzten beiden am Leben bleiben. Die Frage ist nun, an welche Stelle muss sich Josephus stellen um vorletzter zu sein, an welche sein Komplize?*

Aus der Sicht des Aufgabenstellers sollten gute Aufgaben beim Lernen helfen. Hier ist einfacher zu erklären, wie das funktioniert. Der Trick beim Aufgabenlösen besteht nicht im Finden der richtigen Antwort. Er besteht im Finden eines Lösungsweges. Da es dazu keine Kochrezepte oder besser keine zwingend zielführenden Algorithmen gibt und das Warten auf Eingebung mitunter lang dauert, müssen wir dazu unsere Intuition trainieren und möglichst viele Lösungsansätze ausprobieren. Dabei hilft es, wenn man schnell sieht, was ein Irrweg ist und was zum Ziel führen könnte. Aufgabenlösen trainiert also Fähigkeiten. Es hilft ebenso, sich statt dem Ziel vorerst kleinere Teilziele zu suchen. Kreativität ist dabei gefragt, ebenso aber logisches Denken und korrektes Argumentieren.

2 Heuristische Prinzipien

Zum Lösen (problemhafter) Aufgaben gibt es Strategien. Wir werden diese hier nur kurz zusammentragen; das Anwenden heuristischer Prinzipien liefert nicht zwingend eine Lösung sondern bestenfalls Ideen, welche zur Erstellung einer Lösung nutzbar sind. Die nachfolgende Liste ist nicht vollständig, wir werden später bei einzelnen Aufgabentypen auf Strategien zurückkommen und diese auch erweitern.

2.1 Man muss Aufgaben verstehen, um sie zu lösen

Auch wenn es eine Selbstverständlichkeit sein sollte: das erste der heuristischen Prinzipien ist, die Aufgabe zu verstehen. Die folgenden Fragen sollten dabei helfen:

- Sind alle vorkommenden Begriffe klar?
- Ist eine Veranschaulichung möglich? (Skizze, Tabelle, ...)
- Was sind Start- und Zielgrößen der Aufgabe?
- Kann man Bezeichnungen einführen, um Start- und Zielgrößen übersichtlicher festhalten zu können?
- Wurden ähnliche Aufgaben schon vorher erfolgreich gelöst?

2.2 Vorwärtsarbeiten

Beginne bei den Startgrößen und überlege, welche potentiellen Teilziele davon erreicht werden können. Gibt es Hilfsmittel (Formeln, Sätze, ...), in denen die Startgrößen vorkommen?

2.3 Rückwärtsarbeiten

Finde Hilfsgrößen, welche es erlauben die Zielgröße zu bestimmen. Gibt es Hilfsmittel, in denen die Zielgrößen vorkommen?

2.4 Spezialisieren

Gerade bei Beweisaufgaben ist es oft sinnvoll, statt der Aussage selbst zuerst einige Spezialfälle der Aussage zu betrachten. Diese haben oft einfachere Beweise, dabei genutzte Beweisstrategien können eventuell auf die allgemeine Situation übertragen werden.

2.5 Fallunterscheidungen

Kann man Spezialfälle besser behandeln, so bietet sich oft eine Fallunterscheidung an. Decken alle behandelbaren Spezialfälle die Gesamtsituation ab, so haben wir das Problem gelöst. Bei Fallunterscheidungen ist deutlich zu machen, dass wirklich alle Fälle abgedeckt sind. Dies bedarf mitunter eines Beweises.

2.6 Verallgemeinern und Abstrahieren

Kann man die Aufgabe in ein allgemeineres Problem einbetten und das allgemeinere Problem lösen? Das mag nach einem Umweg klingen, allerdings liefert Abstraktion mit der damit verbundenen Vereinfachung der Sprache oft Hinweise auf effektive Lösungswege. Durch Abstrahieren kann man überflüssige Informationen und ablenkende Details aus der Aufgabe entfernen.

2.7 Kenntnisse erweitern

Sind Aufgaben trotz aller Anstrengungen nicht lösbar, so fehlen mitunter Kenntnisse und damit notwendige Hilfsmittel. Anregungen findet man in einschlägiger Literatur.

3 Bestimmungsaufgaben

Wir werden anhand verschiedener Aufgabentypen herausarbeiten, wie Lösungen gefunden und wie diese dann dargestellt werden. Finden und Darstellen sind zwei verschiedene Aspekte des Aufgabenlösens.

3.1 Logikrätsel

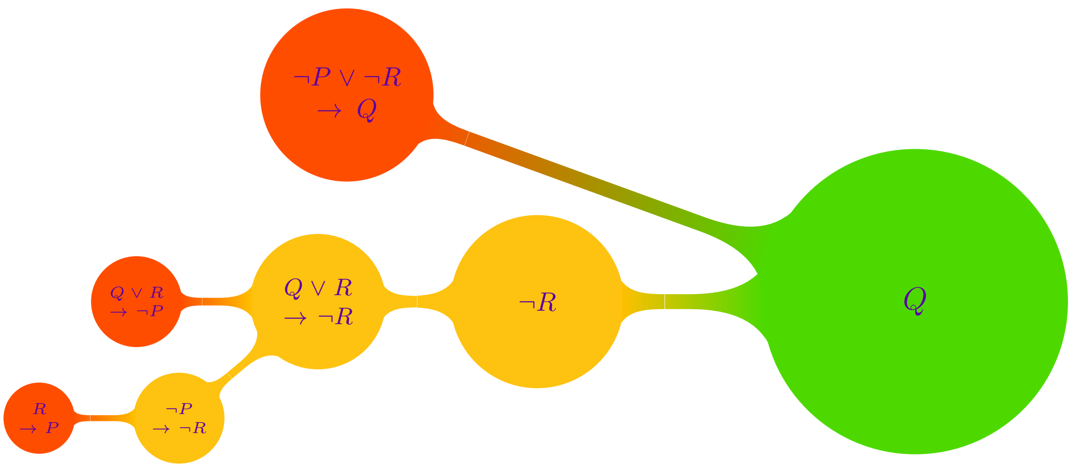
Aussagenlogische Knobelaufgaben sind wohl die einzigen Aufgaben, deren Lösung man in Form eines Lösungsgraphen übersichtlich darstellen kann. Wir schreiben dazu die gegebenen Aussagen als Startgrößen, die abgeleiteten Hilfsaussagen als Teilziele und erhalten dadurch eine Übersicht über die logische Struktur. Als Beispiel betrachten wird die folgende Aufgabe

Aufgabe: **Der Kommissar hat drei Tatverdächtige: Paula, Quentin und Ralf. Er weiß:**

1. **Wenn sich Quentin oder Ralf als Täter herausstellen, ist Paula unschuldig.**
2. **Ist aber Paula oder Ralf unschuldig, dann muss Quentin ein Täter sein.**
3. **Ist Ralf schuldig, so ist Paula Mittäterin.**

Wer ist schuldig? Wer ist unschuldig?

Eine mögliche Argumentationskette zur Lösung der Aufgabe ist in folgendem Lösungsgraphen festgehalten. Wir haben die Argumentationsschritte nicht explizit aufgeführt; hier wurden logische Schlussregeln angewandt. Wir verwenden die Abkürzungen P, Q und R jeweils für die Aussagen "Paula ist schuldig", "Quentin ist schuldig" und "Ralf ist schuldig".



Wir können dies direkt in eine formal aufgeschriebene Lösung übersetzen.

Lösung:
Bezeichne $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ *beziehungsweise* $\mathbf{R}$ *jeweils die Aussage Paula, Quentin beziehungsweise Ralf ist schuld. Also gilt*

$$
\begin{array}{rl}
(i) & \mathbf{Q} \vee \mathbf{R} \to \neg\mathbf{P} \\
(ii) & \neg\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{R} \to \mathbf{Q} \\
(iii) & \mathbf{R} \to \mathbf{P} \\
(iii) \Rightarrow (iv) & \neg\mathbf{P} \to \neg\mathbf{R} \\
(i) \wedge (iv) \Rightarrow (v) & \mathbf{Q} \vee \mathbf{R} \to \neg\mathbf{R} \\
(v) \Rightarrow (vi) & \neg\mathbf{R} \\
(vi) \wedge (ii) \Rightarrow (vii) & \mathbf{Q}
\end{array}
$$

und Quentin ist der Täter.

Lösungen müssen nicht komplett in Symbolen geschrieben werden, um formal korrekt zu sein.

Lösung:
Wir vereinbaren folgende Abkürzungen

P *Paula ist schuldig*

Q *Quentin ist schuldig*

R *Ralf ist schuldig*

um die gegebenen Aussagen kürzer formulieren zu können. Es wird vorausgesetzt, dass

$$(i)\quad \mathbf{Q} \vee \mathbf{R} \to \neg\mathbf{P}, \qquad (ii)\quad \neg\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{R} \to \mathbf{Q}, \qquad (iii)\quad \mathbf{R} \to \mathbf{P}$$

gelten. Aussage (iii) ist äquivalent zu $\neg\mathbf{P} \to \neg\mathbf{R}$ *und liefert mit (i) damit* $\mathbf{Q} \vee \mathbf{R} \to \neg\mathbf{R}$. *Damit kann aber* $\mathbf{R}$ *nicht gelten, es folgt also (iv)* $\neg\mathbf{R}$. *Mit (ii) ergibt sich daraus* $\mathbf{Q}$. *Also ist Quentin der Täter.*

Das ist nicht die einzige korrekt dargestellte Lösung. Alternativ kann man die Aufgabe auch durch eine vollständige Fallunterscheidung lösen. Wir betrachten wieder die Aussagen P, Q und R und untersuchen alle Wahrheitswertkombinationen separat.

Lösung:
Es stehe $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ *und* $\mathbf{R}$ *als Abkürzung jeweils für die Aussagen „Paula ist die Täterin", „Quentin ist der Täter" beziehungsweise „Ralf ist der Täter". In der folgenden Tabelle wird untersucht, ob eine der Aussagen (i), (ii) oder (iii) falsch ist oder ob andernfalls alle drei wahr sind.*

$\mathbf{P}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$	(i) $\mathbf{Q} \vee \mathbf{R} \to \neg\mathbf{P}$	(ii) $\neg\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{R} \to \mathbf{Q}$	(iii) $\mathbf{R} \to \mathbf{P}$
w	w	w	f		
w	w	f			f
w	f	w	f		
w	f	f		f	
f	w	w			f
f	w	f	w	w	w
f	f	w		f	
f	f	f		f	

Da damit alle Fälle abgedeckt sind und nur in der drittletzten Zeile drei wahre Aussagen stehen, muss Quentin der Täter sein.

3.2 Lösen von Gleichungen oder Gleichungssystemen

Die übliche Strategie zum Lösen von Gleichungen besteht darin, die Gleichung umzuformen bis entweder die Lösungen ablesbar oder bekannte Lösungsformeln anwendbar sind. Hier ist zu beachten, dass nicht alle Umformungen Äquivalenzumformungen sein müssen (und, gerade bei Wurzelgleichungen, auch nicht sein werden). Oft helfen hier auch Fallunterscheidungen. Wir betrachten zwei Aufgaben. Zuerst sei

Aufgabe: Finde alle reellen Zahlen x, für die $\sqrt{x^2+2} - x = \sqrt{x^2+2x+2}$ gilt.

zu lösen.

Lösung:
Sowohl die linke als auch die rechte Seite der Gleichung sind für alle reellen Zahlen x definiert. Angenommen, für ein reelles x gilt die Gleichung. Dann folgt

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2+2} - x = \sqrt{2x^2+4x+2} \\ \Rightarrow\quad & x^2+2-2x\sqrt{x^2+2}+x^2 = 2x^2+4x+2 \\ \Leftrightarrow\quad & -2x\sqrt{x^2+2} = 4x \\ \Leftrightarrow\quad & \sqrt{x^2+2} = -2 \quad \vee \quad x = 0 \\ \Rightarrow\quad & x^2+2 = 4 \quad \vee \quad x = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x = \sqrt{2} \quad \vee \quad x = -\sqrt{2} \quad \vee \quad x = 0 \end{aligned}$$

Da nicht alle Umformungen Äquivalenzumformungen waren, ist eine Probe durchzuführen. Für $x = 0$ gilt

$$\sqrt{2} = \sqrt{0+2} + 0 = \sqrt{0+0+2} = \sqrt{2},$$

es handelt sich also um eine Lösung. Für $x = \pm\sqrt{2}$ gilt jedoch

$$2 \mp \sqrt{2} = \sqrt{2+2} \mp \sqrt{2} \neq \sqrt{4 \pm 4\sqrt{2} + 2} = \sqrt{6 \pm 4\sqrt{2}}$$

und es handelt sich hierbei nicht um Lösungen. Die gesuchte Lösungsmenge ist also

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, \sqrt{x^2+2} - x = \sqrt{2x^2+4x+2}\} = \{0\}.$$

Es lohnt sich, die Lösung einmal genauer anzuschauen. Zuerst nehmen wir an, x sei Lösung und folgern daraus weitere Eigenschaften von x bis hin zu möglichen Werten. Die Doppfelpfeile sind dabei egal, da einige der Pfeile nur in eine Richtung gehen folgern wir nur aus "x ist Lösung", dass "$x = 0$ oder $x = \pm\sqrt{2}$" gilt. Die Probe ist die fehlende umgekehrte Beweisrichtung. Aus der Annahme, $x = 0$ beziehungsweise $x = \pm\sqrt{2}$ wird gefolgert, dass die Gleichung gilt (beziehungsweise nicht gilt).

Man hätte auch im vorvorletzten Umformschritt feststellen können, dass Wurzeln nichtnegativ sind und damit keine weiteren Lösungen auftreten können. Das hätte einen Fall der Probe erspart. Ebenso ist die erste Umformung streng genommen eine Äquivalenz, da beide Seiten der Ausgangsgleichung im Lösungsfall nichtnegativ waren. Schreibt man dies als Begründung zum ersten Schritt und ersetzt $\Rightarrow$ durch $\Leftrightarrow$, so kann die nun überflüssige Probe entfallen und wir sind direkt nach Schritt drei fertig.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Aufgabe:

Aufgabe: Finde alle reellen Zahlen x mit $|x-3|+1 = |2x+1|$.

Hier hilft eine Fallunterscheidung, um die stückweise definierte Betragsfunktion

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

in einfachere Ausdrücke umzuformen. Wir geben nur eine mögliche korrekte Lösung an.

Lösung:
Wir unterscheiden die Fälle $x < -1/2$, $-1/2 \leq x < 3$ und $x \geq 3$.
Fall 1: $x < -1/2$. In diesem Fall ist

$$3 - x + 1 = -2x - 1$$

zu lösen, also äquivalent dazu $x + 4 = -1$ und damit $x = -5$. Da betreffendes x kleiner als $-1/2$ ist, handelt es sich um eine Lösung.
Fall 2: $-1/2 \leq x < 3$. In diesem Fall ist

$$3 - x + 1 = 2x + 1$$

zu lösen, also äquivalent dazu $3 = 3x$ und damit $x = 1$. Wiederum handelt es sich um eine Lösung.
Fall 3: $x \geq 3$. In diesem Fall ist

$$x - 3 + 1 = 2x + 1$$

zu lösen, also äquivalent dazu $x - 2 = 2x + 1$ und damit $x = -3$. Da dies nicht die Voraussetzungen des Falles erfüllt, handelt es sich nicht um eine Lösung.
Als Lösungsmenge ergibt sich damit

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - 3| + 1 = |2x + 1|\} = \{-5, 1\}.$$

3.3 Lösungsmengen von Ungleichungen

Ungleichungen werden meist wie Gleichungen gelöst, hier ist jedoch besondere Vorsicht bei Umformungen geboten. Auf beiden Seiten einer Ungleichung kann zum Beispiel dieselbe monoton wachsende Funktion angewandt werden. Um Monotonie zu garantieren, bedarf es mitunter einer Fallunterscheidung. Monoton fallende Funktionen kehren Relationszeichen um.

Als Beispiel betrachten wir die Aufgabe

Aufgabe: Finde alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\sqrt{x^2+2} - 2 \geq \sqrt{2x^2+4x+2}$.

Lösung:
Angenommen, x löst die Ungleichung. Da dann beide Seiten positiv sind, gelten folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2+2} - x \geq \sqrt{2x^2+4x+2} \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 2 - 2x\sqrt{x^2+2} + x^2 \geq 2x^2 + 4x + 2 \\ \Leftrightarrow \quad & -2x\sqrt{x^2+2} \geq 4x \end{aligned}$$

Für $x = 0$ sind beide Seiten Null und die Ungleichung ist erfüllt. Für $x \neq 0$ unterscheiden wir zwei weitere Fälle.
Fall 1: $x > 0$. In diesem Fall folgt $-2\sqrt{x^2+2} \geq 4$, was aber nicht sein kann. Also existiert kein $x > 0$ welches die Ungleichung löst.
Fall 2: $x < 0$. In diesem Fall folgt $-2\sqrt{x^2+2} \leq 4$, was für jedes x erfüllt ist.
Die Lösungsmenge der Ungleichung ist also

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ \sqrt{x^2+2} - 2 \geq \sqrt{2x^2+4x+2}\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq 0\} = (-\infty, 0].$$

Zusammen mit der Stetigkeit der Wurzelfunktionen kann man auch anders argumentieren. Wir haben im vorigen Abschnitt schon die Gleichung $\sqrt{x^2+2}-2=\sqrt{2x^2+4x+2}$ gelöst und $x=0$ als einzige Lösung bestimmt. Die Lösungsmenge einer Ungleichung $f(x) \leq g(x)$ für stetige Funktionen besteht aus Intervallen, die entweder keine Endpunkte haben (und damit durch ganz $\mathbb{R}$ gegeben sind), oder deren Endpunkte durch Lösungen der Gleichung $f(x)=g(x)$ bestimmt sind. Es bleibt also nur zu schauen, welche der Intervalle $(-\infty, 0]$ und $[0, \infty)$ in der Lösungsmenge enthalten sind.

Man beachte, dass man für diese Lösung mehr Wissen besitzen (Stetigkeit, ...) und damit eventuell auch mehr argumentieren muss.

3.4 Geometrische Konstruktionsaufgaben

Hierbei handelt es sich um eine Sonderform der Bestimmungsaufgabe. In klassischen Konstruktionsaufgaben ist nicht ein geometrisches Objekt als Lösung gesucht, sondern eine Konstruktionsbeschreibung, also ein Algorithmus wie man das gesuchte Objekt mit Zirkel und Lineal aus gegebenen Größen konstruieren kann. Neben der Angabe der Konstruktionsbeschreibung sind dabei **zwei** Beweise zu führen. Zum Einen ist zu zeigen, dass jedes durch die Konstruktion gelieferte Objekt eine Lösung des Problems ist. Darüberhinaus ist zu zeigen, dass auch jede Lösung durch die Konstruktion gefunden wird.

Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir ein Beispiel. Wir nutzen dazu eine klassische Konstruktionsaufgabe.

Aufgabe: Zu konstruieren sind alle Dreiecke zu gegebener Grundseite c, Höhe h und Winkel γ (gegenüberliegend der Seite c).

Die Argumentationen in Konstruktionsaufgaben sind dazu eher speziell und basieren auf der Kenntnis geometrischer Sätze und geometrischer Orte. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass das Zeichnen von Parallelen in gegebenem Abstand und das Übertragen von Winkeln elementare Konstruktionsschritte sind. Eine reine Zirkel- und-Lineal-Konstruktion enthält wesentlich mehr Schritte.

Lösung:
Teilbeweis 1: Sei $\triangle ABC$ ein die Aufgabe lösendes Dreieck mit $c=\overline{AB}$. Da h die Höhe des Dreiecks zur Grundseite c ist, liegt somit C auf einer Parallelen zu AB mit Abstand h. Da ebenso $\gamma = \angle(BAC)$ gilt, liegt C auf einem Kreis mit Sehne AB und Zentriwinkel 2γ (auf der C gegenüberliegenden Seite). Also liegt C in der Schnittmenge aus Parallele und Kreis.
Konstruktionsbeschreibung: Wir konstruieren die Schnittmenge aus Parallele und Kreis.

1. Konstruiere eine Parallele p zu AB im Abstand h
2. Konstruiere die Mittelsenkrechte m zu $\overline{AB}$ und eine Gerade l, welche m im Schnittpunkt mit der Geraden AB im Winkel γ schneidet.
3. Konstruiere eine Parallele zu l durch den Punkt A und bestimme den Schnittpunkt M mit m.
4. Zeichne den Kreis k um M durch den Punkt A.
5. Bestimme die Schnittpunkte C_i von k mit p.

Teilbeweis 2: Jedes so konstruierte Dreieck $\triangle ABC_i$ löst die Konstruktionsaufgabe. Dazu beobachten wir, dass der Mittelpunkt M aufgrund der Wahl des Winkels gegenüber von der Parallelen p liegt und der Zentriwinkel des Kreises somit 2γ beträgt. Also sind gegenüberliegende Peripheriewinkel stets γ groß und Punkte auf dem Schnitt von k mit p lösen die Aufgabenstellung.

3.5 Kombinatorische Aufgaben

Kombinatorische Aufgaben sind Zählaufgaben, es sind also Anzahlen von Objekten zu bestimmen. Häufig benötigt man dazu Abzählformeln oder die Fähigkeit, Strukturen in den zu zählenden Mengen zu erkennen. Elementare Stochastikaufgaben sind oft kombinatorischer Natur.

Aufgabe: In einer Schublade befinden sich $n \geq 1$ schwarze und drei weiße Kugeln. Die Kugeln unterscheiden sich nur in ihrer Farbe. Mit verbundenen Augen werden vier Kugeln aus der Schublade genommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei davon weiß sind?

Die zu bestimmende Wahrscheinlichkeit ist bei gleichverteilten Ereignissen der Quotient aus der Zahl der günstigen Ereignisse und der Zahl der möglichen Ereignisse. Beim Aufgabenlösen ist also wirklich zu zählen.

Lösung:
Aus $n+3$ Objekten lassen sich auf $\binom{n+3}{4}$ verschiedene Weisen vier ohne Beachtung der Reihenfolge auswählen. Dies sind die möglichen Ereignisse. Wir bestimmen die Anzahl der günstigen Ereignisse und unterscheiden dazu zwei disjunkte Fälle.
Fall 1: Es sind genau drei weiße Kugeln unter den ausgewählten. Dann sind alle weißen dabei und es bleibt nur eine der schwarzen auszuwählen. Dafür gibt es n Möglichkeiten.
Fall 2: Es sind genau zwei weiße Kugeln ausgewählt. Dazu müssen zwei aus den drei ausgewählt werden, was $\binom{3}{2} = 3$ Möglichkeiten liefert. Weiterhin sind zwei der schwarzen Kugeln zu wählen, dies gibt $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten.
Zusammengefasst liefert dies

$$\text{möglich:} \quad \binom{n+3}{4} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{24} \qquad \text{günstig:} \quad n + 3\binom{n}{2} = n + 3\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n+3n(n-1)}{2}$$

und damit als Wahrscheinlichkeit

$$\frac{24(2n+3n(n-1))}{2(n+3)(n+2)(n+1)n} = \frac{12(3n-1)}{(n+3)(n+2)(n+1)}.$$

Wenn man beim Zählen Fälle unterscheidet, so ist darauf zu achten, dass entweder die Fälle disjunkt sind oder dass die Formel von Vereinigung und Durchschnitt

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

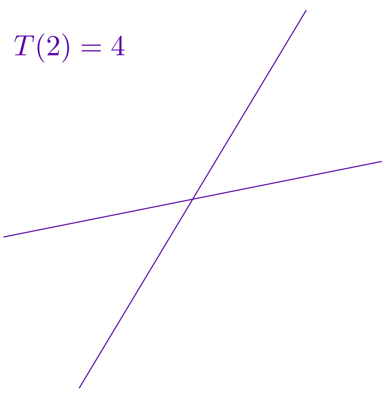
für die Anzahl $\#(A \cup B)$ der Elemente der Vereinigung $A \cup B$ angewandt wird. Der Schnitt $\#(A \cap B)$ wird sonst doppelt gezählt. Für Vereinigungen aus mehr als zwei Mengen wird die Formel entsprechend komplizierter, für drei Mengen ergibt sich

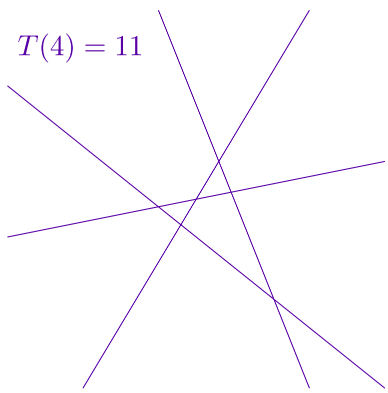
$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(B \cap C) - \#(A \cap C) + \#(A \cap B \cap C).$$

Schnitte sind also jeweils separat nochmals zu zählen.

Oft führen kombinatorische Probleme auf Rekursionsformeln, eine Überführung in eine explizite Lösung benötigt dann mitunter einen zusätzlichen Induktionsbeweis. Dazu auch ein Beispiel.

Aufgabe: Jede Gerade teilt die Ebene in zwei Teile. Zeichnet man n Geraden, welche sich paarweise derart schneiden, dass nie drei Geraden durch einen Punkt gehen, so entstehen $T(n)$ Teile. Bestimme die Anzahl $T(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.





Lösung:
Es gilt $T(1) = 2$. Angenommen, wir haben schon n Geraden gezeichnet. Dann wird jede neu hinzu gezeichnete Gerade durch die anderen n Geraden geschnitten und es entstehen (da nie drei Geraden durch einen Punkt gehen) n Schnittpunkte. Diese zerlegen die Gerade in $n+1$ Abschnitte, jeder dieser Abschnitte zerteilt einen entsprechenden Teil der vorherigen Zerlegung. Damit folgt

$$T(n+1) = T(n) + n + 1. \tag{*}$$

Wir behaupten, dass daraus

$$T(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2} \tag{**}$$

folgt.
IA: $T(1) = 2 = 1 + \frac{1(1+1)}{2}$ ist korrekt.
IS: Angenommen, $T(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ gilt für ein n. Dann impliziert die Rekursionsformel (*)

$$T(n+1) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = 1 + \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

und die Formel für $T(n+1)$ folgt.
Nach dem Induktionsprinzip ist damit die Formel (**) für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.

4 Beweisaufgaben

Wir wollen noch einmal kurz auf Beweisaufgaben eingehen. Vom Problemlösestandpunkt sind Beweisaufgaben einfacher, da man klar gesagt bekommt, was die zu beweisende Aussage ist. Früher üblicher als heute ist, das Beweisende mit der Abkürzung **q.e.d.** zu versehen, was für *quod erat demonstrantum* steht und damit *was zu Beweisen war* bedeutet.

Beweisen will gelernt sein. Eine erste Übung im Beweisen stellen oft Bestimmungsaufgaben mit den darin enthaltenen Beweiselementen dar. Bei diesen ist die logische Notwendigkeit der Beweise am einfachsten nachvollziehbar. Die Mathematik als Wissenschaft lebt von der Beweisbarkeit ihrer Aussagen, also der damit verbundenen endgültigen und nach Akzeptanz auch unanfechtbaren Entscheidung über die Korrektheit von Aussagen. Dies tritt in dieser Form nur in der Mathematik auf. Beweise, die in der Antike geführt und als korrekt erkannt wurden, haben bis heute nichts an ihrer Gültigkeit eingebüßt.[1]

Einer der klassischen Beweise betrifft die Aussage, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Primzahlen sind Zahlen größer Eins, welche nur sich selbst und Eins als Teiler haben. Damit kann man Zahlen solange in Faktoren zerlegen, bis diese selbst unzerlegbar und damit prim sind. Kennt man letztere Aussage (oder besser, darf man sie im Beweis verwenden), so ist der Beweis der Unendlichkeit der Menge der Primzahlen wie folgt führbar:

Beweis:
Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_m$. Betrachtet man nun die Zahl

$$q = p_1 p_2 \cdots p_m + 1 = 1 + \prod_{k=1}^{m} p_k,$$

so ist q zu jeder der Zahlen $p_1, \ldots, p_m$ teilerfremd. Damit kann keine der Zahlen p_1 bis p_m ein Primfaktor von q sein, es muss also mehr Primzahlen geben. Widerspruch! q.e.d.

[1] Das ist natürlich etwas übertrieben, Euklids Elemente galten für zwei Jahrtausende als Modell für den Aufbau der Mathematik. Trotz allem wurde lange die Notwendigkeit des Parallelenaxioms diskutiert und erst im ausgehenden 19. Jahrhundert wurde mit dem Göttinger Programm Bernhard Riemanns und der axiomatischen Begründung verschiedener Geometrien durch David Hilbert ein logisch konsistenteres Geometrieverständnis geschaffen. Nichtsdestotrotz sind die meisten der Euklidischen Beweise bis heute Unterrichtsgegenstand bei der Vermittlung elementarer (Schul-) Geometrie.

Das verwendete Beweisverfahren des indirekten Beweises ist von einem philosophisch-logischen Standpunkt aus umstritten. Es bedarf eines logischen Grundprinzips, **tertium non datur**, welches besagt, dass es neben den Wahrheitswerten **wahr** und **falsch** keine dritte Option gibt. Führen wir eine dritte Option **nicht direkt beweisbar** ein, so kann ein solcher Beweis nicht geführt werden.

Bei den meisten Mathematikern ist der indirekte Beweis nicht umstritten und das oben zitierte *tertium non datur* Bestandteil der Aussagenlogik. Es besteht jedoch die Grundüberzeugung, dass ein kurzer direkter Beweis stets einem indirekten vorzuziehen ist. Ein Spezialfall des indirekten Beweises ist der Beweis durch Kontraposition. Hier wird direkt bewiesen und aus der negierten Behauptung die negierte Voraussetzung gefolgert.

4.1 Direkte Beweise

Direkte Beweise bestehen aus einer logischen Argumentationskette, welche aus den Voraussetzungen mit Hilfe von Axiomen und Sätzen der Mathematik die zu zeigende Behauptung ableitet. Um direkte Beweise zu finden, nutzt man die am Anfang dieses Materials diskutierten heuristischen Prinzipien des Vorwärts- und Rückwärtsarbeitens.

4.2 Indirekte Beweise

Indirekte Beweise zeigen, dass aus den Voraussetzung und der negierten Behauptung ein Widerspruch folgt. Wir haben also formal mehr Voraussetzungen und das Ziel besteht in einer widersprüchlichen Aussage der Form $\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A}$ für einen logischen Ausdruck $\mathbf{A}$. Da man $\mathbf{A}$ nicht kennt, hilft hier Rückwärtsarbeiten nicht. Es ist schwer, einen eleganten indirekten Beweis selbst zu finden. Allerdings kann man versuchen, einmal gefundene Beweise zu modifizieren bis sie schön werden.

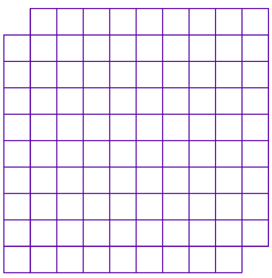
Ein klassisches Beispiel betrifft die Irrationalität von $\sqrt{2}$. Die zu zeigende Aussage ist also: Es existiert keine rationale Zahl p/q mit $p^2/q^2 = 2$. Wir können Brüche kürzen, es genügt also nach gekürzten Brüchen zu suchen.

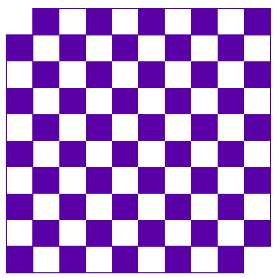
<u>Beweis:</u>
Angenommen, es gäbe teilerfremde natürliche Zahlen p und q mit $p^2 = 2q^2$. Dann kommt die Primzahl 2 als Primfaktor in p^2 vor, also aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung auch in p. Damit ist aber 4 Teiler von p^2 und somit 2 Teiler von q^2 und wiederum nach obiger Argumentation 2 Teiler von q. Das widerspricht aber der Annahme, dass p und q teilerfremd sind. q.e.d.

4.3 Beweise durch Bilder

Auch durch Bilder kann man beweisen. Allerdings ist dies schwieriger und bedarf einiger Erklärungen: Es ist zu beweisen, dass die gezeichneten Bilder etwas beweisen. Da dieser Aufwand das Aufgabenlösungen in der Regel übersteigt, werden Beweise durch Bilder nur selten thematisiert und oft als unmathematisch abgetan. Dem ist aber nicht so.

Typische Bildbeweise sind zum Beispiel Färbungsverfahren. Wir stellen die Frage, ob ein quadratisches 10×10 Spielfeld mit abgeschnittenen gegenüberliegenden Ecken durch 1×2 Dominosteine überdeckt werden kann. Die Antwort ist nein: Färbt man die Spielfelder wie auf einem Schachbrett, so sind zwei weiße Felder entfernt worden. Jedoch überdeckt ein Domino stets ein weißes und ein schwarzes Feld.





Man kann einen solchen Beweis formalisieren, aber die Idee wird dabei weniger präsent sein als durch eine graphische Beweisführung oder wie hier durch den Verweis auf die bildhafte Vorstellung eines Schachbretts.

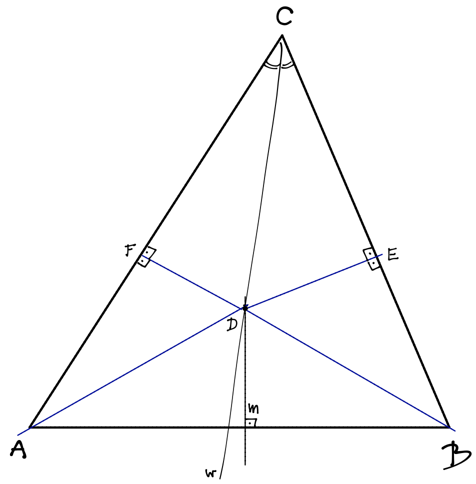
Beweise durch Bilder sind strikt vom Überzeugen durch optische (Selbst-) Täuschung zu unterscheiden. Gerade bei geometrischen Beweisaufgaben sollte man stets versuchen mehrere generische Bilder der zu beweisenden Situation zu zeichnen (oder besser: zu konstruieren), um sich nicht selbst über die Lage von Punkten oder das eventuelle Zusammenfallen von Punkten zu täuschen. Ein typischer Beweis durch Selbsttäuschung ist nachfolgend angegeben. Es wird bewiesen, dass jedes Dreieck gleichschenklig ist. Worin besteht der Fehler?

<u>Beweis:</u>
Wir bezeichnen das Dreieck mit $\triangle ABC$. Und betrachten (wie in nebenstehender Skizze) die Mittelsenkrechte m auf der Strecke AB, die Winkelhalbierende w des Winkels $\angle BCA$. Vom Schnittpunkt D der Geraden m und w werden die Lote auf die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ gefällt und die entsprechenden Schnittpunkte mit E und F bezeichnet.

(i) Die Dreiecke $\triangle DFC$ und $\triangle DEC$ stimmen in drei Winkeln überein. Da der Punkt D auf w liegt, sind zudem die Strecken $\overline{DE}$ und $\overline{DF}$ gleich lang. Deshalb sind die Dreiecke $\triangle DFC$ und $\triangle DEC$ kongruent. Also sind $\overline{CF}$ und $\overline{EC}$ gleich lang.

(ii) Der Punkt D liegt auf m. Deshalb ist $\overline{AD}$ genauso lang wie $\overline{BD}$. Also sind $\triangle ADF$ und $\triangle BDE$ kongruent (da sie in zwei Seiten und dem rechten Winkel übereinstimmen). Also ist $\overline{AF}$ genauso lang wie $\overline{BE}$.

(iii) Aus (i) und (ii) folgt, dass $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ gleich lang sind und das Dreieck somit gleichschenklig ist.



q.e.d.

4.4 Beweise durch vollständige Induktion

Beweise durch vollständige Induktion sind ein spezielles Beweisverfahren für Aussagen über natürliche Zahlen. Eine Aussage $A(n)$ gilt für alle natürlichen Zahlen (ab einem Startwert n_0), falls sie für die kleinste(n) natürlichen Zahlen gilt und aus der Aussage $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$ gefolgert werden kann. Dies implizierte eine in gewisser Hinsicht standardisierte Darstellungsweise von Induktionsbeweisen und eine Gliederung in Induktionsanfang und Induktionsschritt. Der Induktionsschritt ist selbst ein direkter Beweis und besitzt damit Voraussetzungen und eine Behauptung. Es hilft, beide explizit hinzuschreiben, die Induktionsvoraussetzung wird für ein (beliebiges aber festes) n angenommen.

Achtung! Nicht jede Aussage, die für alle natürliche Zahlen zu zeigen ist, ist auch per Induktion beweisbar. Typische Hinweise auf die Nützlichkeit eines Induktionsbeweises sind Rekursionsformeln oder Konstruktionsschritte, die für jedes n gleich ablaufen. Wir geben zwei Beispiele für Induktionsbeweise, die besonders sind. Im ersten stimmt die Aussage für $n = 1, 2$ und $n \geq 4$, der Induktionsschritt kann allerdings für $n \geq 3$ geführt werden.

<u>Aufgabe:</u> Beweise $n^2 \leq 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, für welche diese Ungleichung gilt.

Beweis:
IA: Es gilt für

$$\begin{aligned} n=1 &: \quad 1^2 = 1 \leq 2 = 2^1, \\ n=2 &: \quad 2^2 = 2^2, \\ n=3 &: \quad 3^2 = 9 \not\leq 8 = 2^3, \\ n=4 &: \quad 4^2 = 16 = 2^4. \end{aligned}$$

IS: Angenommen, für ein $n \geq 3$ gilt $n^2 \leq 2^n$. Dann folgt

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + n^2 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1},$$

da $n^2 - 2n - 1 = (n - 1 - \sqrt{2})(n - 1 + \sqrt{2}) \geq 0$ für $n \geq 3 > 1 + \sqrt{2}$ gilt. *q.e.d.*

Der Beweis ist so nicht optimiert, der Induktionsschritt ist natürlich für $n \geq 4$ zu führen und der Fall $n = 3$ hat nichts im Induktionsanfang zu suchen! Ebenso fehlt ein Antwortsatz, für welche n die Ungleichung denn nun gilt und für welche nicht. Besser wäre:

Lösung:
Wegen $1^2 = 1 \leq 2 = 2^1$ und $2^2 = 2^2$ gilt die Aussage für $n = 1$ und $n = 2$. Für $n = 3$ ist sie falsch, da $3^2 = 9 \not\leq 8 = 2^3$. Für alle $n \geq 4$ beweisen wir sie nun durch vollständige Induktion:

IA: Die Aussage gilt für $n = 4$, da $4^2 = 16 = 2^4$.
IS: Angenommen, für ein $n \geq 4$ gilt $n^2 \leq 2^n$. Da für $n \geq 4 > 1 + \sqrt{2} > 1 - \sqrt{2}$ stets

$$n^2 - 2n - 1 = (n - 1 - \sqrt{2})(n - 1 + \sqrt{2}) \geq 0$$

gilt, folgt

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + n^2 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

Nach dem Induktionsprinzip ist die Aussage damit für alle $n \geq 4$ bewiesen, mit obigen Vorbemerkungen also für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$.

In einem zweiten Induktionsbeweis geht es vordergründig gar nicht um natürliche Zahlen, sie messen nur die Komplexität der Situation.

Aufgabe: In einer Ebene seien n Geraden eingezeichnet. Zeige, dass zwei Farben genügen, um die dadurch entstehenden Teilflächen einzufärben ohne dass zwei Teile gleicher Farbe in einer gemeinsamen Kante aneinanderstoßen.

Lösung:
IA: Für $n = 1$, also mit einer Geraden, werden die beiden Hälften mit den beiden verschiedenen Farben eingefärbt.
IS: Angenommen, für jede Anordnung mit n Geraden ist eine solche Zweifärbung möglich. Gegeben seien nun $n + 1$ Geraden. Wir wählen eine der Geraden aus und markieren diese. Die Zerlegung mit den verbleibenden n Geraden ist nach Voraussetzung zweifärbbar. Färbt man nun alle Teile auf der linken Seite der markierten Geraden um (vertauscht also die Farben), so entsteht eine zulässige Färbung für die gegebenen $n + 1$ Geraden und die Behauptung ist gezeigt.
Nach dem Induktionsprinzip ist damit für jede gegebene Zerlegung die Zweifärbbarkeit gezeigt.

5 Bepunktung und Rückmeldung

Wenn die Aufgabe darin besteht, einen Lösungsweg zu finden, die gesuchte Lösung also gar nicht eindeutig bestimmt sein wird, ist es umso schwerer, Lösungen sinnvoll mit Punkten zu bewerten. **Alle** korrekten Lösungen sind **gleich richtig**. Manche Lösungen sind origineller, andere kürzer und einige vielleicht überraschender. Was zu bewerten und zu bepunkten ist, ist dass Lösungen vollständig aufgeschrieben und die verwendete Argumentation nachvollziehbar dargestellt wird.

Kleine Rechenfehler sind dabei weniger gravierend als grobe logische Inkonsistenzen oder gar Fehler in der Argumentation!