Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 1 (WS 2018/19) — Blatt 3

Can you imagine young people nowadays making a study of trigonometry for the fun of it?
Well I did.
- Clyde Tombaugh (1906-1987)

Nutzen Sie Ihr Schulwissen und/oder eine Recherche, um die Aufgaben 3.1-3.3 zu bearbeiten. Alle Funktionen sind als Funktionen aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ zu verstehen. Die (natürliche) Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion und wird mit ln oder log bezeichnet.

Aufgaben zur Abgabe in der Vorlesung am 7. November

3.1. **(a)** Skizzieren Sie die Exponential- und die Logarithmusfunktion in ein gemeinsames Schaubild und geben Sie jeweils den Definitions- und Wertebereich an.

(b) Nutzen Sie die Rechenregeln der Exponentialfunktion, um folgende Logarithmusgesetze herzuleiten: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ gilt

$$\textbf{(i)} \quad \log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b), \qquad \textbf{(ii)} \quad \log(a^b) = b\log(a).$$

3.2. Die Hyperbelfunktionen *sinus hyperbolicus* (sinh) und *cosinus hyperbolicus* (cosh) sind definiert als

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right), \qquad \cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

(a) Skizzieren Sie sinh und cosh.

(b) Geben Sie jeweils den Definitions- und Wertebereich von sinh und cosh an. Ist sinh bzw. cosh surjektiv?

(c) Geben Sie ein größtmögliches Intervall[1] an, auf dem sinh bzw. cosh injektiv ist. Skizzieren Sie auch die Umkehrfunktion und geben Sie deren Definitions- und Wertebereich an. Diese werden mit *areasinus hyperbolicus* (arsinh) bzw. *areacosinus hyperbolicus* (arcosh) bezeichnet.

(d) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Votieraufgaben

3.3. **(a)** Skizzieren Sie cos, sin und tan in ein gemeinsames Schaubild und geben Sie jeweils den Definitions- und Wertebereich an.

(b) Geben Sie ein größtmögliches Intervall an, auf dem cos, sin bzw. tan injektiv ist und ergänzen Sie das Schaubild durch die Umkehrfunktionen. Geben Sie jeweils auch Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktionen an. Diese werden mit arccos, arcsin bzw. arctan bezeichnet.

[1] Ein Intervall I heißt an **dieser** Stelle größtmöglich, wenn es kein Intervall $\tilde{I}$ gibt, auf dem die gewünschte Eigenschaft gilt und das $I \subsetneq \tilde{I}$ erfüllt.

3.4. Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion. Weiter seien $A_1, A_2 \subset A$ beliebige Teilmengen von A.

(a) Zeigen Sie:

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

gilt und finden Sie ein Gegenbeispiel für die Gleichheit.

(c) Formulieren und beweisen Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung an f, sodass in **(b)** für alle Teilmengen von A Gleichheit gilt.

3.5. (a) Nutzen Sie Aufgabe 1.1 der Vortragsübung und vollständige Induktion, um den binomischen Lehrsatz zu beweisen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

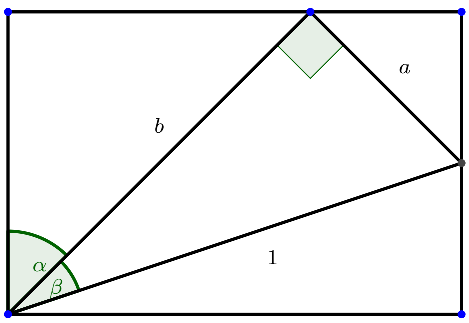
(b) Nutzen Sie den binomischen Lehrsatz, um einen zur Vortragsübung alternativen Beweis für die Aussagen

$$\textbf{(i)} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \textbf{(ii)} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

zu führen.

Zusatzaufgaben

3.6. Nutzen Sie die Skizze



und elementargeometrische Argumente, um die Additionstheoreme

(a) $\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1$

(b) $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$,

für $\alpha, \beta > 0$ mit $\alpha + \beta < \pi/2$ zu beweisen. Nutzen Sie dazu die geometrische Definition am rechtwinkligen Dreieck für Sinus und Cosinus.

3.7. Im Folgenden sei p stets eine beliebige, aber feste Primzahl. Für $a, b \in \mathbb{Z}$ schreiben wir

$$a \equiv b \mod p \;:\Longleftrightarrow\; p|(b-a).$$

(a) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, sodass

$$a|b, \quad p|b, \quad p \nmid a.$$

Zeigen Sie: $p \,\Big|\, \frac{b}{a}$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq p-1$ gilt:

$$p \,\Bigg|\, \binom{p}{k}$$

(c) Nutzen Sie den binomischen Lehrsatz, **(a)** und vollständige Induktion, um folgenden Satz zu beweisen.

Satz (**Kleiner fermatscher Satz**[2]). *Sei $a \in \mathbb{Z}$ und p eine Primzahl. Dann gilt*

$$a^p \equiv a \mod p.$$

[2]benannt nach Pierre de Fermat (1607-1665)

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de