Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 1 (WS 2018/19) — Blatt 11

Natura non facit saltus.
(Gottfried Wilhelm Leibniz; 1646–1716)

Aufgaben zur Abgabe am Ende der Vorlesung am 9.1.2018

11.1. **(a)** Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch die durch

(i) $|f|(x) = |f(x)|$, **(ii)** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, **(iii)** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$,
(iv) $\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, **(v)** $\min\{f, g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

definierten Funktionen stetig auf $\mathbb{R}$ sind. Verwenden Sie dazu jeweils die $\varepsilon - \delta-$Definition der Stetigkeit oder in vorangegangenen Teilaufgaben bewiesene Aussagen.

(b) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Sei weiter $x_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 = f(x_0)$. Zeigen Sie: Ist f stetig in x_0 und g stetig in y_0, so ist $h = g \circ f$ stetig in x_0. Nutzen Sie dazu

(i) die Folgendefinition **(ii)** die $\varepsilon - \delta -$ Defintion

der Stetigkeit.

Votieraufgaben

11.2. Untersuchen Sie anhand der Definition folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

(a) $f(x) = x^n$ für gegebenes $n \in \mathbb{N}$.

(b) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = 0 \text{ und für } x \text{ irrational,} \\ q^{-1}, & \text{für } x = p/q \text{ mit teilerfremden } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{für } x \geq 0, \\ 0, & \text{für } x < 0. \end{cases}$

11.3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Zeigen Sie, dass f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt und diese, falls sie existieren, von erster Art sind.

11.4. **(a)** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert genau dann, wenn die einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ existieren und übereinstimmen. Folgern Sie, dass f im Punkt x_0 genau dann stetig ist, wenn gilt:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

(b) Derartige Richtungsstetigkeit impliziert im Höherdimensionalen keine Stetigkeit. Wir betrachten dazu die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ die einseitigen Grenzwerte entlang der Strecken $y = ax$

$$\lim_{x \to 0 \pm 0} f(x, ax) = 0$$

erfüllen und ebenso $\lim_{y \to 0 \pm 0} f(0, y) = 0$ gilt, die Funktion im Punkt $(0, 0)$ aber unstetig ist.

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

Zusatzaufgaben

11.5. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass dann $f(rx) = rf(x)$ für alle $r \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$.

(b) Angenommen, f ist auf einem beschränkten offenen Intervall I beschränkt, d.h. es exisitert ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in I$. Beweisen Sie, dass dann f stetig ist und ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(c) Zeigen Sie: Ist f in einem Punkt unstetig, so ist der Graph $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ dicht in $\mathbb{R}^2$.