Prof. TeknD Timo Weidl,
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis I (WS 18/19) — Probeklausur

Termin: *3. – 13. Dezember 2018*
Hilfsmittel: **keine**
Bearbeitungszeit: *90 min*

Aufgabe 1.

(a) Geben Sie die Definition einer Äquivalenzrelation auf einer Menge A an.

(b) Es sei $\sim$ die Relation auf $\mathbb{Z}$, welche für $a, b \in \mathbb{Z}$ durch

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad \exists_{n \in \mathbb{Z}} \quad a^2 - b^2 = 2n$$

definiert ist. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und bestimmen Sie die entsprechenden Äquivalenzklassen.

(c) Zeigen Sie, dass die Familie der Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation auf A eine Zerlegung der Menge A bildet und umgekehrt jeder Zerlegung der Menge A genau eine Äquivalenzrelation entspricht.

Aufgabe 2.

(a) Definieren Sie die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen und die vier Grundrechenoperationen $+$, $\cdot$, $-$, $/$ auf $\mathbb{C}$.

(b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von

$$\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{30}.$$

(c) Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Menge aller z mit

$$|z| - \operatorname{Im} z \leq 1.$$

Aufgabe 3.

(a) Geben Sie die Definition einer Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ sowie die formale Negation dieser Definition an.

(b) Es seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$, so dass $\{a_n\}$ beschränkt ist und $b_n \to 0$ für $n \to \infty$. Beweisen Sie, dass dann die Folge $\{a_n\, b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ den Grenzwert 0 besitzt.

(c) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Entscheiden Sie, ob die Folge

$$x_n = \frac{2^n \sqrt[n]{5n}}{2^n + n^8 + \sin(n^2\pi)}.$$

für $n \to \infty$ konvergent ist und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.
