Prof. T. Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Paul Schwahn, B.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Woche: 5. - 11. November 2018**

Analysis I (WS 2018/19) — Zusatzblatt 2

The method of "postulating" what we want has many advantages; they are the same as the advantages of theft over honest toil.
(Bertrand Russell; 1872-1970)

Z2.1. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden Ungleichungen?

(a)

$$5^n \geq 4^n + 3^n + 2^n,$$

(b)

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{7}{12},$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n},$$

(d)

$$(1+q)^n \leq 1 + 2^n q, \qquad \text{wobei } 0 < q < 1/2.$$

Z2.2. Es liegen n Geraden in einer Ebene, von denen keine zwei parallel sind und von denen nie mehr als zwei durch einen gemeinsamen Punkt gehen. In wie viele Teilflächen wird die Ebene durch die Geraden zerteilt?

Z2.3. Die Addition natürlicher Zahlen wird wie folgt definiert:

$$n + 1 := n' \tag{IA}$$

$$n + m' := (n+m)' \tag{IV}$$

Nach dem Induktionsaxiom ist $n + m$ damit für alle $n, m \in \mathbb{N}$ erklärt. Zeigen Sie ausgehend von dieser Definition, dass

$$n + m = m + n \tag{K}$$

$$(n+m) + k = n + (m+k) \tag{A}$$

für alle $n, m, k \in \mathbb{N}$ gelten.

Z2.4. Die Folge $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der *Lucas-Zahlen* sei definiert durch die Rekursion

$$l_{n+2} := l_{n+1} + l_n$$

für $n \in \mathbb{N}$ sowie $l_1 := 1$, $l_2 := 3$. Betrachten Sie zu jedem l_n den Rest bei der Division durch 3. Gibt es darin ein Muster? Stellen Sie für die Reste eine allgemeine Regel auf und beweisen Sie diese.
Ist l_{1000} durch 3 teilbar?
(Beispiel: Die ersten Lucas-Zahlen sind $1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots$ Die entsprechenden Reste bei der Division durch 3 sind $1, 0, 1, 1, 2, 0, \ldots$)