Prof. T. Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Paul Schwahn, B.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis I (WS 2018/19) — Zusatzblatt 5

Die vollständige Erkenntniss der Natur einer analytischen Function muss auch die Einsicht in ihr Verhalten bei den imaginären Werthen des Arguments in sich schließen und oft ist sogar letztere unentbehrlich zu einer richtigen Beurtheilung der Gebarung der Function im Gebiete der reellen Argumente.
(Carl Friedrich Gauß; 1777-1855)

Frage: Wie stellt man eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ grafisch dar?
Der Graph einer solchen Funktion ist eine Teilmenge von $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ und müsste daher in einem vierdimensionalen kartesischen Koordinatensystem gezeichnet werden. Dies ist aber praktisch nicht möglich. Eine Idee wäre es, den Realteil $z \mapsto \operatorname{Re} f(z)$ und den Imaginärteil $z \mapsto \operatorname{Im} f(z)$ der Funktion separat in dreidimensionalen Koordinatensystemen als Graph zu zeichnen. Daraus kann man aber nicht viel ablesen. Ein genaueres Bild kann man sich von der Funktion machen, indem man den Graphen ihren Betrags zeichnet. Dies ist zwar aufwändig, wurde in der Vergangenheit aber oft gemacht. In Abb. 1

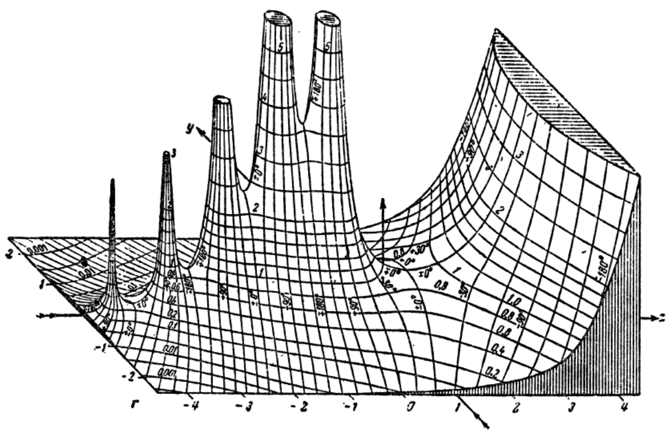

Abbildung 1: Betrag der Gammafunktion nach Jahnke, 1909

sehen wir ein handgezeichnetes Bild der komplexen Gammafunktion, die durch

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

definiert ist. Man kann den Anstieg für positiven Realteil von z sowie die Polstellen in $-\mathbb{N}_0$ gut erkennen. Allerdings geht eine wichtige Information verloren: die *Phase* $e^{i\varphi}$ der Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$. Dies kann behoben werden, indem man die komplexe Ebene wie in Abb. 2 einfärbt und damit jeder Phase $e^{i\varphi}$ bzw. jedem Argument φ eine eindeutige Farbe zuordnet und die analytische Landschaft entsprechend einfärbt. Das Resultat sehen Sie in Abb. 3. Allerdings sieht man auch hier einiges nicht, das durch Pole oder Steigungen verdeckt wird. Besser ist es, die komplexe Ebene von oben zu betrachten und den Betrag durch Schattierung oder Höhenlinien darzustellen (siehe Abb. 4). Für eine gewisse Klasse von Funktionen, sogenannte *analytische Funktionen*, stellt sich heraus, dass der Betrag unwesentlich ist, d. h. dass man aus der Farbe allein schon alles ablesen kann, was man über die Funktion wissen muss. Deshalb lässt man den Betrag von f oft einfach weg und betrachtet nur die durch die Phase von f bestimmte farbige komplexe Ebene. Das entstehende Bild nennt man *Phasenporträt* der Funktion f. Analytische Funktionen sind beispielsweise alle Polynome, aber auch die Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen. Auch die Gammafunktion ist analytisch.

© jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de weidl@mathematik.uni-stuttgart.de
ana1.paul.schwahn@gmail.com

Abbildung 2: Färbung der komplexen Ebene nach Phase

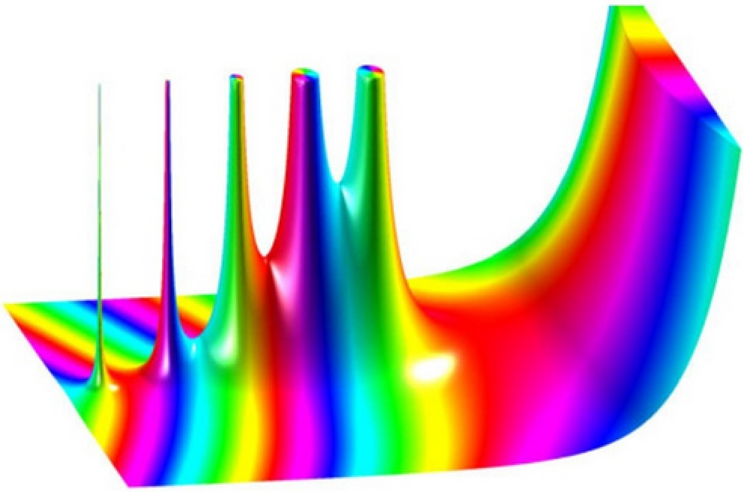

Abbildung 3: Eingefärbte analytische Landschaft der Gammafunktion

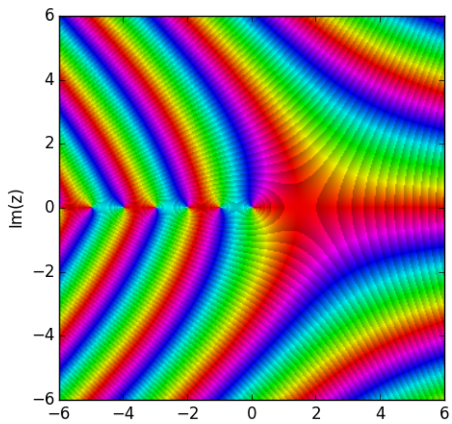

Abbildung 4: Phasenporträt der Gammafunktion mit Höhenlinien

Frage: Was kann man aus dem Phasenporträt ablesen?
In einer kleinen Umgebung um die Null kommt jede Phase und damit jede Farbe vor. An dieser Eigenschaft kann man in einem Phasenporträt die Nullstellen einer Funktion erkennen. Dabei treten die Farben, wenn man einen kleinen Kreis entgegen des Uhrzeigersinns (in mathematisch positive Richtung) um die Nullstellen entlanggeht, stets in der Reihenfolge Rot $\to$ Grün $\to$ Blau auf. Dies kann man in Abb. 2 erkennen, das man auch als Phasenporträt der Identität $z \mapsto z$ verstehen kann. Bei einer k-fachen Nullstelle treten die Farben jedoch jeweils k-fach entlang des Weges auf. Zur Verdeutlichung sieht man in Abb. 5 Phasenporträts der Funktionen $z \mapsto z^2$ und $z \mapsto z^3$, die eine doppelte bzw. dreifache Nullstelle in $z = 0$ haben. Nun kann eine Funktion auch eine Polstelle haben.

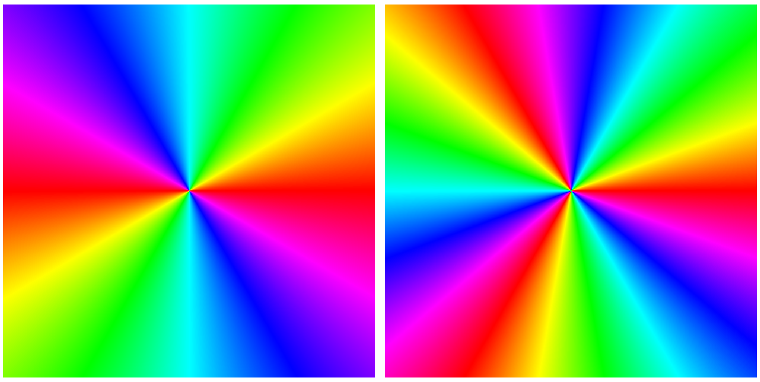

Abbildung 5: Phasenporträts der Funktionen $z \mapsto z^2$ (links) und $z \mapsto z^3$ (rechts)

Eine solche kann man genauso aus dem Phasenporträt ablesen, nur dass die Farben, wenn man in mathematisch positiver Richtung um die Polstelle herum läuft, in entgegengesetzter Reihenfolge auftreten, d. h. Rot $\to$ Blau $\to$ Grün. Dies kann man sich damit erklären, dass gerade $1/e^{i\varphi} = e^{-i\varphi}$; die Phase ist also im Vergleich zu einer Nullstelle genau gespiegelt. Auch hier gilt wieder, dass bei k-fachen Polen jede Farbe k-mal in der Nähe der Polstelle vorkommt. Beispielhaft sehen Sie in Abb. 6 Phasenporträts der Funktionen $z \mapsto 1/z$ und $z \mapsto 1/z^2$. Hat man nun ein Phasenporträt einer

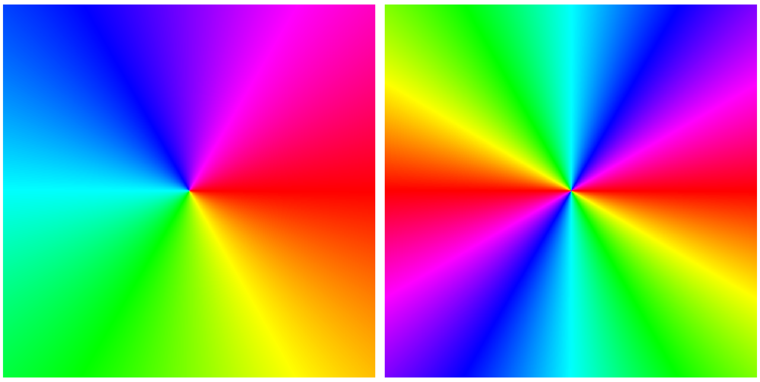

Abbildung 6: Phasenporträts der Funktionen $z \mapsto \frac{1}{z}$ (links) und $z \mapsto \frac{1}{z^2}$ (rechts)

analytischen Funktion f vor sich, kann man also auf die Nullstellen und Polstellen schließen. Weiß man zusätzlich noch, dass f eine gebrochenrationale Funktion ist, kennt man bis auf einen konstanten Faktor die Funktion selbst; so lässt sich jede solche Funktion $f \neq 0$, die für $k = 1, \ldots, m$ Nullstellen der Ordnung $\mu_k \in \mathbb{N}$ an den Stellen $a_k \in \mathbb{C}$ und für $l = 1, \ldots, n$ Pole der Ordnung $\nu_l \in \mathbb{N}$ an den Stellen $b_l \in \mathbb{C}$ besitzt, schreiben als

$$f(z) = c \cdot \frac{\prod_{k=1}^{m} (z - a_k)^{\mu_k}}{\prod_{l=1}^{n} (z - b_l)^{\nu_l}}$$

für ein $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Zum Beispiel sind in Abb. 7 die Funktionen

$$z \mapsto z(z-1) \text{ und } z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$$

durch Phasenporträts dargestellt. Nach obigem Verfahren kann man erkennen, wo die Nullstellen und Polstellen liegen. Schließlich ist in Abb. 8 noch das Phasenporträt der komplexen Sinusfunktion zu sehen. Man beachte insbesondere die Lage der Nullstellen sowie die Phase entlang der reellen Achse.

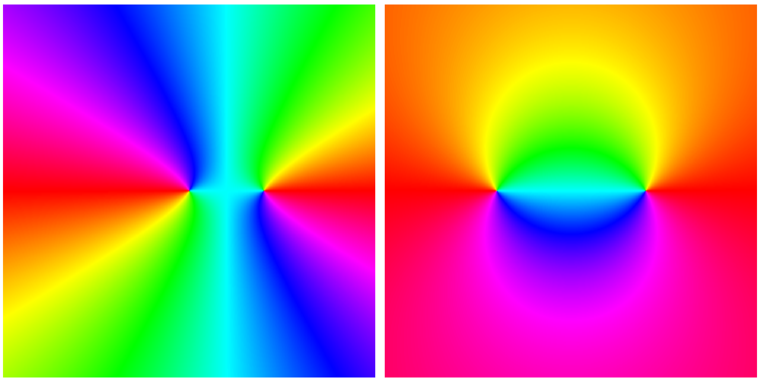

Abbildung 7: Phasenporträts der Funktionen $z \mapsto z(z-1)$ (links) und $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$ (rechts)

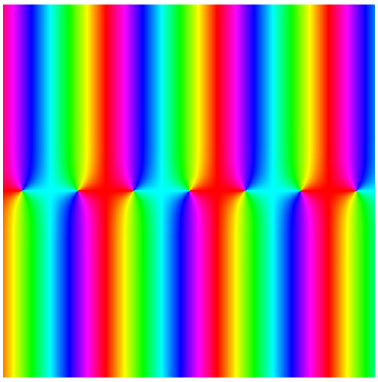

Abbildung 8: Phasenporträt der Funktionen $z \mapsto \sin z$

Frage: Wie sehen Wurzeln und andere Umkehrfunktionen aus?
Man kann auch für komplexe Zahlen eine Quadratwurzel definieren. Allerdings ist die Wurzel nicht eindeutig, denn die Gleichung $w^2 = z$ besitzt für festes $z \neq 0$ zwei Lösungen in w. Das Problem, das entsteht, wenn man die Quadratwurzel $\sqrt{z}$ einer komplexen Zahl z definiert, lässt sich leicht an folgender Kette von Gleichungen erkennen:

$$-1 = \sqrt{-1}^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Das Paradoxon lässt sich auflösen, wenn man erkennt, dass sowohl i als auch $-i$ Quadratwurzeln von -1 sind und sowohl 1 als auch -1 Quadratwurzeln von 1. Gibt es nun eine Möglichkeit, die Quadratwurzel konsistent zu definieren? Dazu betrachten wir wieder die Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$ für ein $z \neq 0$, wobei $r > 0$, $\varphi \in [-\pi, \pi[$. Um die Gleichung $w^2 = z$ zu lösen, kann man zunächst die Beträge vergleichen und erhält $|w| = \sqrt{r}$. Außerdem ist einerseits

$$\left(e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)^2 = e^{i\varphi},$$

andererseits wegen $e^{2\pi i} = 1$ auch

$$\left(e^{i\frac{\varphi+2\pi}{2}}\right)^2 = e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\varphi}.$$

Somit ergeben sich für $r > 0$, $\varphi \in [-\pi, \pi[$ die beiden Zweige

$$\sqrt{re^{i\varphi}} = \begin{cases} \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi}{2}} \end{cases}$$

der komplexen Quadratwurzel. In Abb. 9 sieht man Phasenporträts der beiden Zweige der komplexen Quadratwurzel. Um die Quadratwurzel nun als Funktion sinnvoll zu definieren, müsste man den Definitionsbereich verändern. Beachte, dass die beiden Zweige ineinander übergehen, wenn man φ jeweils durch $\varphi + 2\pi$ ersetzt. Es wäre also denkbar, das Argument φ im Definitionsbereich nicht von $-\pi$ bis π laufen zu lassen, sondern von $-\pi$ bis 3π; damit ist die Quadratwurzel durch $\sqrt{re^{i\varphi}} = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$ wohldefiniert. Dazu wählt man sich als Definitionsbereich zwei komplexe Ebenen, die man entlang einer Linie gleiches Arguments „aufschneidet“ und so „verklebt“, dass man nach einem einzigen Umlauf um die Null am gleichen Punkt der jeweils anderen Ebene landet und nach zwei Umläufen wieder den Startpunkt erreicht. Das entstehende Konstrukt R nennt man die *Riemannfläche* der Quadratwurzel. Die beiden Ebenen, aus denen R besteht, nennt man *Blätter* der Riemannfläche. Definiert man die Quadratwurzel nun als Funktion $R \to \mathbb{C}$, ist sie sowohl bijektiv als auch stetig, da sie keine Sprünge besitzt. Man kann die Schnitte in Abb. 9 am plötzlichen Farbwechsel und damit der Unstetigkeit des jeweiligen Zweigs erkennen; in der Abbildung liegen die Schnitte auf beiden Ebenen beim Argument $\varphi = \pi$ bzw. $\varphi = 3\pi$. Zu beachten ist, dass die Wahl des Schnittes beliebig ist; die

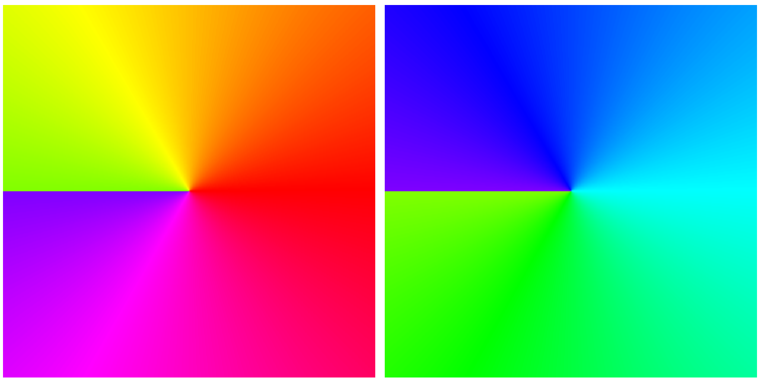

Abbildung 9: Phasenporträts der beiden Zweige der komplexen Quadratwurzel $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$; links $\varphi \in [-\pi, \pi[$; rechts $\varphi \in [\pi, 3\pi[$

einzige Rahmenbedingung ist, dass er in der Null beginnt und bis ins Unendliche läuft. Man muss die beiden Zweige dann jedoch entsprechend definieren.
Obiger Ansatz lässt sich auch auf andere „mehrwertige“ komplexe Funktionen anwenden; so hat man für die n-te Wurzel genau n verschiedene Zweige; es gilt nämlich

$$\left(\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}\right)^n = re^{i\varphi} \text{ für } \ k = 0, \ldots, n-1.$$

Somit besteht die Riemannfläche zur n-ten Wurzel aus n Blättern. Abb. 10 zeigt die drei verschiedenen Zweige der komplexen Kubikwurzel; die Schnitte sind an den Farben wieder gut zu erkennen. Auch hier kann man die Riemannfläche aus den Blättern wieder so zusammensetzen, dass die darauf definierte Kubikwurzel stetig wird.

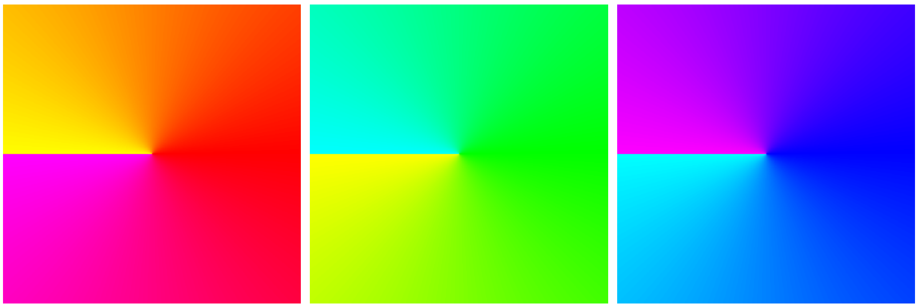

Abbildung 10: Phasenporträts der Zweige der komplexen Kubikwurzel $\sqrt[3]{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{3}}$; links $\varphi \in [-\pi, \pi[$; mittig $\varphi \in [\pi, 3\pi[$; rechts $\varphi \in [3\pi, 5\pi[$

Weiter kann man auch für den komplexen natürlichen Logarithmus eine Riemannfläche definieren. Diese hat unendlich viele Blätter, denn es gilt

$$e^{\ln r + i(\varphi + 2\pi k)} = re^{i\varphi} \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

Damit kann man die abzählbar vielen Zweige des Logarithmus schreiben als

$$\ln(re^{i\varphi}) = \ln r + i(\varphi + 2\pi k),\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Auch für kompliziertere Funktionen kann man dieses Verfahren anwenden. Dabei sucht man zunächst die *Verzweigungspunkte* der Funktion, d. h. die Punkte, für die keine Mehrdeutigkeit vorliegt. Im Fall der Wurzel liegt der einzige Verzweigungspunkt bei $z = 0$. Beim Logarithmus ist dieses Bild nicht zutreffend, lässt sich aber leicht modifizieren. Untersuchen wir exemplarisch den Ausdruck

$$\sqrt{z(z-1)},$$

so finden wir die Verzweigungspunkte bei $z = 0$ und $z = 1$. Um nun auf die Zweige der Funktion zu kommen, bemerken wir, dass

$$\sqrt{z(z-1)} = \sqrt{z}\sqrt{z-1} = \sqrt{r_0 r_1}e^{i\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}},$$

wobei sich $r_0, r_1, \varphi_0, \varphi_1$ aus

$$z = r_0 e^{i\varphi_0},\ \ z - 1 = r_1 e^{i\varphi_1}$$

ergeben und φ_0, φ_1 bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt sind. Die beiden Zweige lassen sich nun schreiben als

$$\begin{aligned} F_+(r_0, r_1, \varphi_0, \varphi_1) &= \sqrt{r_0 r_1}e^{i\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}}, \\ F_-(r_0, r_1, \varphi_0, \varphi_1) &= \sqrt{r_0 r_1}e^{i\frac{\varphi_0+\varphi_1+2\pi}{2}}. \end{aligned}$$

In diesem Zusammenhang sollten φ_0, φ_1 aus dem Intervall $[0, 2\pi[$ gewählt werden.
Wir zeichnen nun die Verzweigungspunkte in der komplexen Ebene und überlegen, was passiert, wenn die Werte von z einen kleinen Kreis um die 0 durchlaufen (siehe Abb. 11). Beim Durchlauf eines solchen Kreises wird der Wert von φ_0 um 2π erhöht. Setzen wir dies in die Zweige ein, erhalten wir

$$F_+(r_0, r_1, \varphi_0 + 2\pi, \varphi_1) = \sqrt{r_0 r_1}e^{i\frac{\varphi_0+\varphi_1+2\pi}{2}} = F_-(r_0, r_1, \varphi_0, \varphi_1)$$

und genauso

$$F_-(r_0, r_1, \varphi_0 + 2\pi, \varphi_1) = F_+(r_0, r_1, \varphi_0, \varphi_1).$$

© jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de weidl@mathematik.uni-stuttgart.de
ana1.paul.schwahn@gmail.com

Anschaulich wird hier der Zweig gewechselt. Gleiches erhält man natürlich, wenn man die 1 in einem kleinen Kreis durchläuft. Wir betrachten nun einen Weg, der beide Verzweigungspunkte umläuft (siehe Abb. 12). Nach einem Umlauf werden die Werte von φ_0 und φ_1 um jeweils 2π erhöht. Setzen wir dies wieder in $F_\pm$ ein, so erhalten wir diesmal

$$F_\pm(r_0, r_1, \varphi_0 + 2\pi, \varphi_1 + 2\pi) = \pm\sqrt{r_0 r_1} e^{i\frac{\varphi_0+\varphi_1+4\pi}{2}} = F_\pm(r_0, r_1, \varphi_0, \varphi_1),$$

die beiden Zweige werden also hier nicht miteinander vertauscht. Gleiches passiert natürlich, wenn weder 0 noch 1 umlaufen werden.
Wir müssen nun Schnitte derart einführen, dass Wege, welche die Zweige vertauschen, auf jeden Fall einen Schnitt kreuzen müssen. Dabei versuchen wir mit möglichst wenigen Schnitten auszukommen. In unserem Fall genügt ein einziger Schnitt entlang der Strecke $[0, 1]$. Nun können wir die Riemannflächen zusammensetzen. Da wir zwei Zweige $F_\pm$ haben, benötigen wir zwei Blätter, also zwei Kopien der komplexen Ebene. Beide Kopien werden entlang der Strecke $[0, 1]$ geschnitten und die Schnittkante derart verklebt, dass sie dem Wechsel der Zweige beim Umlauf um einen Verzweigungspunkt gerecht werden. In Abb. 13 sehen Sie Phasenporträts der beiden Zweige von $\sqrt{z(z-1)}$. Man kann den Schnitt entlang $[0, 1]$ in der Abbildung gut nachvollziehen.

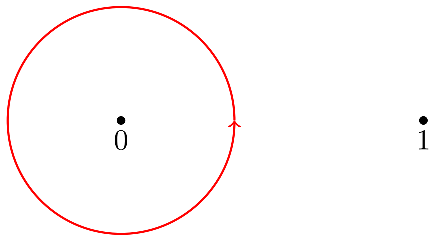

Abbildung 11: Umlauf um den Punkt 0

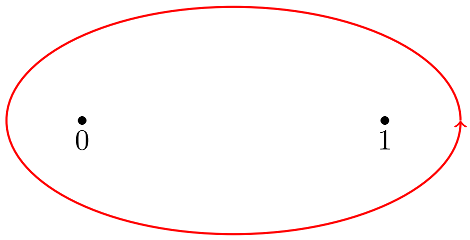

Abbildung 12: Umlauf um beide Verzweigungspunkte 0 und 1

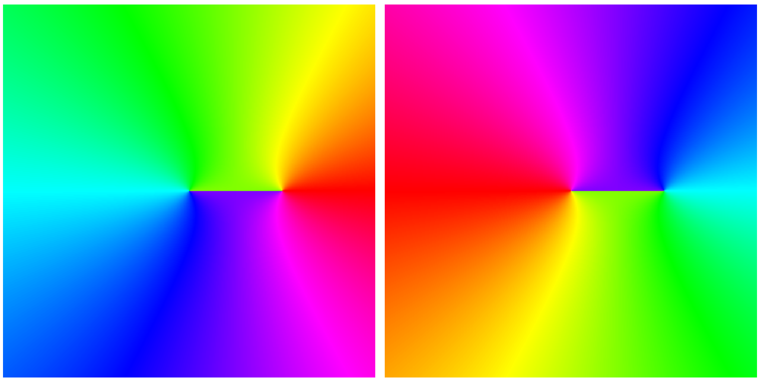

Abbildung 13: Phasenporträts der beiden Zweige von $\sqrt{z(z-1)}$