Prof. T. Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Paul Schwahn, B.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Woche: 17. - 23. Dezember 2018

Analysis I (WS 2018/19) — Zusatzblatt 7

In many cases, mathematics is an escape from reality. The mathematician finds his own monastic niche and happiness in pursuits that are disconnected from external affairs. Some practice it as if using a drug. Chess sometimes plays a similar role. In their unhappiness over the events of this world, some immerse themselves in a kind of self-sufficiency in mathematics. (Some have engaged in it for this reason alone.)
(Stanislaw Ulam; 1909-1984)

Z7.1. Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie, dass $(A, d\big|_{A\times A})$ genau dann vollständig ist, wenn A bezüglich der metrischen Topologie auf X abgeschlossen ist.

Z7.2. Wir betrachten die Einschränkung der Metrik der Riemannschen Zahlenkugel

$$d_1(x, y) := \frac{2|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}$$

auf $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, d_1)$ nicht vollständig ist.

(b) Was ist der Abschluss von $\mathbb{R}$ in $\hat{\mathbb{C}}$?

Z7.3. Auf $\mathbb{R}$ definieren wir mittels der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ die Metrik

$$d_2(x, y) := |f(x) - f(y)|\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, d_2)$ ein nicht vollständiger metrischer Raum ist.

(b) Überlegen Sie sich einen vollständigen metrischen Raum $(\hat{\mathbb{R}}, d)$ mit $d\big|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = d_2$.