Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 1 (WS 2019/20) — Blatt 3

Die Mathematik ist eine weite, schöne Landschaft, die man zuerst aus der Ferne bewundert, die es aber wert ist, durchwandert und in allen Einzelheiten ihrer Hügel und Täler, ihrer Bäche, Felsen, Bäume und Blumen studiert zu werden.
- Arthur Cayley (1821-1895)

Aufgaben zur Abgabe am Ende der Vorlesung am 6. November

3.1. Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $A_1, A_2 \subset A$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

für alle $A_1, A_2 \subset A$ gilt und finden Sie ein Gegenbeispiel für die Gleichheit.

(c) Zeigen Sie, dass in **(b)** genau dann Gleichheit für alle $A_1, A_2 \subset A$ gilt, wenn f injektiv ist.

3.2. **(a)** Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die Bernoullische Ungleichung

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R},\ x \geq -1$.

(b) Sei $p > 0$ und $x_n = p^{\frac{1}{n}} - 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Folgern Sie aus der Bernoullischen Ungleichung:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad x_n \leq \frac{p-1}{n}$$

Votieraufgaben

3.3. **(a)** Seien A, B, C, D Mengen und seien f, g, h Funktionen zwischen A und B, B und C bzw. C und D. Beweisen Sie ausgehend von der Definition der Funktion als Relation, dass die Komposition von Funktionen assoziativ ist, d.h.

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Zeigen Sie insbesondere, dass die Definitionsbereiche von $h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ übereinstimmen.

(b) Zeigen Sie:

(i) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f : A \to C$ injektiv.

(ii) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f : A \to C$ surjektiv.

(iii) Ist $g \circ f : A \to C$ injektiv, so ist f injektiv. Ist auch g injektiv?

(iv) Ist $g \circ f : A \to C$ surjektiv, so ist g surjektiv. Ist auch f surjektiv?

3.4. Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ ist der *Binomialkoeffizient* aus n und k definiert durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ die Gleichung

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

gilt.

(b) Nutzen Sie **(a)** und das Prinzip der vollständigen Induktion, um den binomischen Lehrsatz zu beweisen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

3.5. **(a)** Nutzen Sie das Prinzip der vollständigen Induktion, um folgende Aussagen zu zeigen

$$\textbf{(i)} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \qquad \textbf{(ii)} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{2^n-1} \tfrac{1}{k} \geq \tfrac{n}{2}.$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Finden und beweisen Sie eine geschlossene Formel für

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Zusatzaufgaben

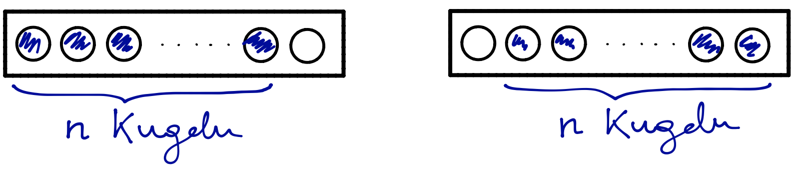
3.6. Wo liegt der Fehler im 'Beweis' des folgenden 'Satzes'?

Satz. *Alle Billiardkugeln besitzen dieselbe Farbe.*

Beweis. Bezeichne B die Menge aller Billiardkugeln. Wir beweisen die Aussage mit Induktion über die Anzahl der Elemente von B.

i) Hat B ein Element, so ist die Aussage offensichtlich.

ii) Angenommen, die Aussage ist für n-elementige Mengen von Billiardkugeln gezeigt. Besitze nun B genau $n+1$ Elemente. Dann ist jede n-elementige Teilmenge von B von gleicher Farbe. Nach folgender Skizze sieht man,



dass auch alle Elemente von B dieselbe Farbe besitzen müssen. ☐