Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 1 (WS 2019/20) — Blatt 5

Bitte vergiss alles, was du auf der Schule gelernt hast, denn du hast es nicht gelernt.
(Edmund Landau, deutscher Mathematiker; 1877 -1938)

Aufgaben zur Abgabe am Ende der Vorlesung am 20. November

5.1. Untersuchen Sie die durch

(a) $a_n = \dfrac{n^2}{2n^2+n}$, **(b)** $b_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$, **(c)** $c_1 = c_2 = 1,\ c_{n+1} = c_n + c_{n-1},\ n \geq 3$

gegebenen Folgen auf Konvergenz für $n \to \infty$ gegen eine rationale Zahl und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Argumentieren Sie dabei sorgfältig und verwenden Sie nur die Definition sowie in der Vorlesung oder den Übungen behandelte Sätze.

Votieraufgaben

5.2. **(a)** Zeigen Sie die Korrektheit der Definition der Multiplikation zweier reeller Zahlen x und y, d.h., dass für Fundamentalfolgen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\tilde{r}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in x$, und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\tilde{s}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in y$ auch $(r_n \cdot s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Fundamentalfolge ist und dass $(r_n \cdot s_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{r}_n \cdot \tilde{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Multiplikation reeller Zahlen assoziativ ist, d.h. für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(c) Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Geben Sie eine Definition für $\frac{1}{x}$ über Fundamentalfolgen und zeigen Sie die Korrektheit dieser Definition.

5.3. **(a)** Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\left(\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad ax^2 + bx + c \geq 0\right) \iff \left(a > 0 \quad \wedge \quad b^2 \leq 4ac\right) \quad \vee \quad \left(a = b = 0 \quad \wedge \quad c \geq 0\right)$$

(b) Zeigen Sie, dass für reelle Zahlen $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

Hinweis: Wenden Sie dazu **(a)** an auf $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2$.

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

5.4. Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie durch Fallunterscheidung:

$$|x| \geq 0 \quad \text{sowie} \quad x = 0 \iff |x| = 0$$

(b) Zeigen Sie ausgehend von der Definition:

(i) $(x, y \geq 0 \ \vee \ x, y \leq 0) \Rightarrow \ x{\cdot}y \geq 0$, **(ii)** $\big((x \geq 0 \wedge y \leq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \geq 0)\big) \Rightarrow x{\cdot}y \leq 0$

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von **(b)** und einer Fallunterscheidung, dass der Betrag multiplikativ ist, d.h

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

(d) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in x$ eine Fundamentalfolge. Zeigen Sie unter Verwendung der umgekehrten Dreiecksungleichung für rationale Zahlen (s. Aufgabe 4.2): $(|r_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge und $(|r_n|)_{n\in\mathbb{N}} \in |x|$.

(e) Folgern Sie, dass die Dreiecksungleichung und die umgekehrte Dreiecksungleichung für beliebige reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gelten.
Hinweis: Nehmen Sie an, die Ungleichungen gelten nicht und führen Sie diese Annahme auf einen Widerspruch zur Dreiecksungleichung bzw. umgekehrten Dreiecksungleichung für rationale Zahlen.

Die folgende Aufgabe diente in den 1970er Jahren zur Vorbereitung auf die Abschlussprüfung in Realschulen in Baden-Württemberg.[1] Sie dürfen Aufgabe 4.4 verwenden.

5.5. Eine Wellenlinie besteht aus aneinandergesetzten Halbkreisen, deren Durchmesser eine Gerade bilden. Der Radius des ersten Halbkreises ist $r_1 = 4\text{cm}$, jeder folgende Radius ist $\frac{3}{4}$ des vorangehenden.

(a) Wie weit erstreckt sich der Wellenzug längs der Geraden?

(b) Wie lang ist der aus den Halbkreisen bestehende Kurvenzug?

(c) Wie groß ist die Fläche aller oberhalb der Geraden liegenden Halbkreise?

[1] Aus: Mathematische Aufgabensammlung für Abschlußklassen an Realschulen, bearbeitet von Hermann-Dietrich Hornschuh

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de