Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 1 (WS 2019/20) — Blatt 9

Gestern standen wir am Abgrund, heute sind wir einen Schritt weiter.

Aufgaben zur Abgabe am Ende der Vorlesung am 18.12.2019

9.1. Entscheiden und begründen Sie, welche der Funktionen $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

(a) $f_1(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, **(b)** $f_2(x) = |x_1| + |x_2|$,

(c) $f_3(x) = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$, **(d)** $f_4(x) = \left(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|}\right)^2$

Normen auf dem $\mathbb{R}^2$ definieren.

Votieraufgaben

9.2. **(a)** Geben Sie für folgende Mengen reeller Zahlen

(i) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$ **(ii)** $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$ **(iii)** $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{1}{n} - 2^n\right\}$

falls existent Supremum, Infimum, Maximum und Minimum an und zeigen Sie andernfalls die Nichtexistenz.

(b) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleer und beschränkt und sei $0 \neq x \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$xA := \{a \cdot x \,:\, a \in A\}, \qquad A + B := \{a + b \,:\, a \in A, b \in B\}.$$

(i) Gilt $A \subseteq B$, dann gilt $\sup A \leq \sup B$ und $\inf A \geq \inf B$.

(ii) $\sup(xA) = x \cdot \sup A$ und $\inf(xA) = x \inf A$, falls $x > 0$ sowie $\sup(xA) = x \cdot \inf A$ und $\inf(xA) = x \sup A$, falls $x < 0$.

(iii) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

9.3. In dieser Aufgabe soll die Beweisskizze von Satz 4 aus der Vorlesung zu einem Beweis vervollständigt werden.
Seien $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ und $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ wie in der Vorlesung definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und folgern Sie daraus und aus $y_n \leq x_n$, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a \leq \mathrm{e}$ konvergiert. Die Ungleichung $y_n \leq x_n$ wurde in der Vorlesung gezeigt und muss hier nicht nochmals bewiesen werden.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$y_m \geq x_n,$$

und folgern Sie die Aussage von Satz 4,

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Hinweis: Dazu können Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ zeigen, dass für $m \geq n$ die Ungleichung

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \geq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{m}\right) \tag{1}$$

gilt und in (1) den Grenzwert $m \to \infty$ bilden.

9.4. **(a)** Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ und $\|\cdot\|$ die von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm, d.h.

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle, \qquad x \in \mathbb{C}^n.$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ die Parallelogrammgleichung erfüllt, d.h. dass

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \tag{2}$$

für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die auf $\mathbb{R}^2$ gegebene Norm $\|\cdot\|$ mit $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ nicht von einem Skalarprodukt induziert wird.

(c) Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ mit induzierter euklidischer Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$2\|x\|^2\|y\|^2 = 2\left(\langle x, y\rangle\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(x_k y_l - x_l y_k\right)^2. \tag{3}$$

Leiten Sie aus (3) die Ungleichung von Cauchy, Schwarz und Bunjakowski her und zeigen Sie, dass in dieser genau dann Gleichheit gilt, wenn $x = 0$ gilt oder es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $y = cx$ gilt.

Zusatzaufgaben

9.5. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fällt und gegen e konvergiert. Zeigen Sie weiter

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion und unter Verwendung von (4) die Ungleichung

$$(n-1)! \le n^n \mathrm{e}^{-n}\mathrm{e} \le n!. \tag{5}$$

(c) Nutzen Sie (5), um

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\mathrm{e}} \le \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \le \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{n}}}{\mathrm{e}}$$

zu zeigen und folgern Sie daraus die folgende schwache Form der Stirlingschen Formel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$