Analysis 1 (WS 2019/20) — Blatt 10

Müßiggang ist der Feind der Seele.
(Benedikt von Nursia, Ordensbegründer der Benediktiner; 480–547)

Dieses Blatt besteht aus zwei Teilen: Aufgaben 10.1 – 10.4 sind reguläre Votieraufgaben und befassen sich mit dem in der Vorlesung zuletzt behandelten Stoff. Die übrigen Aufgaben sind Zusatzaufgaben und dienen der Wiederholung und Vertiefung sowie zum Troste und zur Unterhaltung in der Finsternis.

Wir wünschen Ihnen frohe und besinnliche Weihnachten und ein gutes Neues Jahr!

Votieraufgaben

10.1. Sei $(M,d) = \big(\mathbb{R}^2, d_{\|\cdot\|}\big)$. Bestimmen Sie das Innere, den Rand und den Abschluss folgender Mengen. Welche der Mengen sind offen, welche abgeschlossen?[1]

(a) $M_1 = \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$

(b) $M_2 = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right) \times (0; n)$

(c) $M_3 = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) : m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$

(d) $M_4 = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} U_{1/n}\big((n^{-1}, n)\big)$

10.2. **(a)** Sei $(M,d) = (\mathbb{R}^n, d_{\|\cdot\|})$. Zeigen Sie, dass $M = \mathbb{R}^n$ und $\emptyset$ die einzigen Mengen sind, welche bezüglich d zugleich offen und abgeschlossen sind.

(b) Gilt die Aussage in **(a)** auch für $M = \mathbb{Q}^n$?

(c) Gibt es eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$, bezüglich welcher **jede** Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ zugleich offen und abgeschlossen ist?

10.3. **(a)** Sei (M,d) ein metrischer Raum und $X \subset M$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{acc}(\operatorname{acc}(X)) \subset \operatorname{acc}(X)$$

(b) Sei $(M,d) = \big(\mathbb{R}, d_{|\cdot|}\big)$. Geben Sie ein Beispiel einer Menge $X \subset \mathbb{R}$ an, für die

$$\operatorname{acc}(X) \neq \varnothing, \qquad \operatorname{acc}(\operatorname{acc}(X)) \neq \varnothing, \qquad \operatorname{acc}(\operatorname{acc}(\operatorname{acc}(X))) = \varnothing$$

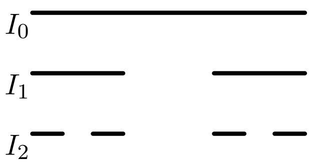
gilt.

[1] Um geordnete Paare reeller Zahlen und Intervalle zu unterscheiden, wurden hier in Intervallen ; statt , als Trennzeichen genutzt.

10.4. **(a)** Sei $(M,d) = \big(\mathbb{R}, d_{|\cdot|}\big)$. Zeigen Sie

$$\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

(b) Diese Aufgabe beschäftigt sich mit der CANTOR-Menge $\mathcal{C}$. Sei $(M,d) = \big(\mathbb{R}, d_{|\cdot|}\big)$ und $I_0 := [0,1]$. Die Menge I_{k+1} entstehe aus I_k, indem in jedem maximalen Teilintervall von I_k das offene mittlere Drittel entfernt wird.



Dies definiert eine Folge von abgeschlossenen Mengen $I_k \subset \mathbb{R}$. Weiterhin sei $\mathcal{C} := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$. Beweisen Sie, dass für die Menge $\mathcal{C}$

$$\operatorname{int}(\mathcal{C}) = \varnothing \qquad \text{und} \qquad \operatorname{acc}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$$

gilt.

Zusatzaufgaben

10.5. **(a)** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_i > 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x_1 \cdots x_n = 1$. Zeigen Sie

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n.$$

Zeigen Sie weiterhin

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n) \Longleftrightarrow (x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1).$$

(b) Seien $y_i > 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nutzen Sie Aufgabenteil **(a)**, um

$$\frac{n}{\frac{1}{y_1} + \cdots + \frac{1}{y_n}} \leq \sqrt[n]{y_1 \cdots y_n} \leq \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}$$

zu zeigen. Die Größen $\frac{n}{\frac{1}{y_1}+\cdots+\frac{1}{y_n}}$, $\sqrt[n]{y_1 \ldots y_n}$ und $\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}$ heißen harmonisches, geometrisches und arithmetisches Mittel der Zahlen $y_1, \ldots, y_n$.

10.6. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien durch die Rekursionsvorschrift

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n},\ n \in \mathbb{N}; \qquad b_1 = b, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},\ n \in \mathbb{N},$$

für gegebene Zahlen $a, b > 0$ definiert. Beweisen Sie, dass beide Folgen konvergieren und gegen denselben Grenzwert streben.
Hinweis: Ungleichung vom harmonischen und geometrischen Mittel

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

10.7. **(a)** Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$a_1 = a > 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1+2a_n}, \; n \in \mathbb{N},$$

konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

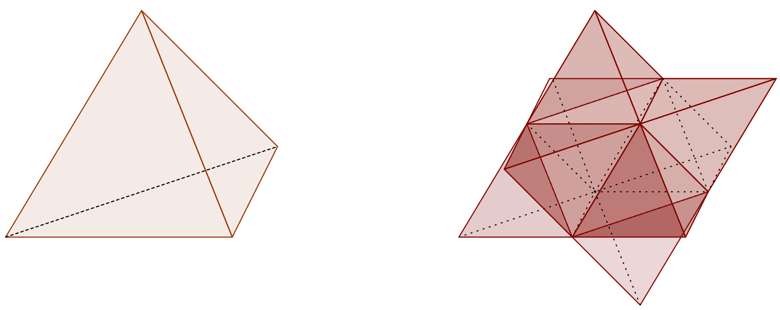
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k},$$

konvergiert und dass für den Grenzwert a die Abschätzung $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ gilt.

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^n} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|a_n|\}$$

10.8. Passend zur Jahreszeit sollen Weihnachtssterne gebastelt werden.
Gegeben sei ein Tetraeder T_0 (also ein Körper mit vier gleichseitigen Dreiecken als Seiten) mit Kantenlänge 1. Wir zerlegen jede Seitenfläche in vier gleichseitige Dreiecke und ersetzen dann die mittlere durch ein kleineres Tetraeder. Den so erhaltenen Körper nennen wir T_1.



Diesen Prozess setzen wir iterativ fort: Aus dem Sternkörper T_k konstruieren wir den Sternkörper T_{k+1}, indem wir jede der äußeren gleichseitigen Dreiecksflächen in vier gleichseitige Dreiecke zerlegen und das mittlere durch ein kleines nach außen gerichtetes Tetraeder ersetzen.

(i) Sei V_k das Volumen des Sternkörpers T_k. Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} V_k$ existiert und bestimmen Sie diesen.

(ii) Sei weiter A_k die Oberfläche des Sternkörpers. Wie groß muss man k wählen, damit $A_k > 10^{10} A_0$ gilt?

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de