

Analysis 1 (WS 2019/20) — Blatt 11

Natura non facit saltus.
(Gottfried Wilhelm Leibniz; 1646–1716)

Aufgaben zur Abgabe am Ende der Vorlesung am 15.1.2020

11.1. (8 Punkte)

(a) Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch die durch

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & |f|(x) = |f(x)|, & \text{(ii)} \quad & (f + g)(x) = f(x) + g(x), & \text{(iii)} \quad & (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \\ \text{(iv)} \quad & \max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}, & \text{(v)} \quad & \min\{f, g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\} \end{aligned}$$

definierten Funktionen stetig auf \mathbb{R} sind. Verwenden Sie dazu jeweils die $\varepsilon - \delta$ -Definition der Stetigkeit oder in vorangegangenen Teilaufgaben bewiesene Aussagen.

(b) Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Sei weiter $x_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 = f(x_0)$. Zeigen Sie: Ist f stetig in x_0 und g stetig in y_0 , so ist $h = g \circ f$ stetig in x_0 . Nutzen Sie dazu

(i) die Folgendefinition (ii) die $\varepsilon - \delta$ -Definition

der Stetigkeit.

Votieraufgaben

11.2. Untersuchen Sie für die folgenden Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils, ob die (einseitigen) Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls. Hierbei sei $D \subset \mathbb{R}$ der maximale Definitionsbereich von f .

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & x_0 = 1, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ x^4, & x > 1 \end{cases} & \text{(b)} \quad & x_0 = 0, \quad f(x) = \frac{x}{|x|} \\ \text{(c)} \quad & x_0 = 0, \quad f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{(d)} \quad & x_0 = 0, \quad f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ \text{(e)} \quad & x_0 = 1, \quad f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1} & \text{(f)} \quad & x_0 = 1, \quad f(x) = \frac{x^n - 1}{x^m - 1}, \quad n, m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

11.3. Untersuchen Sie anhand der Definition folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

(a) $f(x) = x^n$ für gegebenes $n \in \mathbb{N}$.

(b) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = 0 \text{ und für } x \text{ irrational,} \\ q^{-1}, & \text{für } x = p/q \text{ mit teilerfremden } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{für } x \geq 0, \\ 0, & \text{für } x < 0. \end{cases}$

- 11.4. (a)** Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert genau dann, wenn die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ existieren und übereinstimmen. Folgern Sie, dass f im Punkt x_0 genau dann stetig ist, wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$$

- (b)** Derartige Richtungsstetigkeit impliziert im Höherdimensionalen keine Stetigkeit. Wir betrachten dazu die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ die einseitigen Grenzwerte entlang der Strecken $y = ax$

$$\lim_{x \rightarrow 0 \pm 0} f(x, ax) = 0$$

erfüllen und ebenso $\lim_{y \rightarrow 0 \pm 0} f(0, y) = 0$ gilt, die Funktion im Punkt $(0, 0)$ aber unstetig ist.

Zusatzaufgaben

- 11.5.** Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- (a)** Zeigen Sie, dass dann $f(rx) = rf(x)$ für alle $r \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$.
- (b)** Angenommen, f ist auf einem beschränkten offenen Intervall I beschränkt, d.h. es existiert ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in I$. Beweisen Sie, dass dann f stetig ist und ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
- (c)** Zeigen Sie: Ist f in einem Punkt unstetig, so ist der Graph $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ dicht in \mathbb{R}^2 .