Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 1 (WS 2019/20) — Blatt 13

Von allen, die bis jetzt nach Wahrheit forschten, haben die Mathematiker allein eine Anzahl Beweise finden können, woraus folgt, dass ihr Gegenstand der allerleichteste gewesen sein müsse.
(René Descartes, frz. Philosoph und Mathematiker; 1596-1650)

Votieraufgaben

13.1. Untersuchen Sie die folgenden Mengen M_k auf (Folgen-)Kompaktheit, jeweils als Teilmenge des angegebenen metrischen Raums (M, d).

(a) $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ mit $(M, d) = \left(\mathbb{R}^2, d_{|\cdot|}\right)$,

(b) $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ mit $(M, d) = \left(\mathbb{R}^2, d_{|\cdot|}\right)$,

(c) $M_3 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ mit $(M, d) = \left(\mathbb{R}, d_{|\cdot|}\right)$,

(d) $M_4 = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ mit $(M, d) = \left(\mathbb{R}, d_{|\cdot|}\right)$, wobei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit Grenzwert x_0 sei.

13.2. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit.

(a) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$, **(b)** $f : [0, 5) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x-1}{x+1}$,

(c) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$, **(d)** $f : [a, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(x),\ a > 0$

13.3. Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen differenzierbar sind und bestimmen Sie ausgehend von der Definition jeweils die Ableitung in diesen Punkten.

(i) $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f_1(z) = z^n,\quad n \in \mathbb{N}$, **(ii)** $f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f_2(x) = \sqrt{x}$,

(iii) $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f_3(z) = \overline{z}$, **(iv)** $f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ f_4(z) = |z|^2$

Untersuchen Sie dabei im Fall einer komplexen Variable sowohl auf komplexe als auch auf reelle Differenzierbarkeit (d.h., ob $f_k|_{\mathbb{R}}$ differenzierbar ist).

13.4. Sei $X \subset \mathbb{C}$ offen und $f : X \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist f im Punkt $z_0 \in X$ komplex differenzierbar, so gilt $f'(z_0) = 0$.

Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

13.5. Sei (M, d) ein metrischer Raum, $X \subset M$ und $x_0 \in \operatorname{acc}(X)$. Seien $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ Funktionen.

(a) Wir schreiben $f \overset{x \to x_0}{=} g \cdot o(h)$, falls eine Funktion $\Psi : X \to \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$f = g \cdot \Psi \quad \text{und} \quad \Psi \overset{x \to x_0}{=} o(h)$$

Zeigen Sie:

$f \overset{x \to x_0}{=} o(g) \quad \Leftrightarrow \quad f \overset{x \to x_0}{=} g \cdot o(1),$ **(ii)** $f \overset{x \to x_0}{=} o(h),\ g \overset{x \to x_0}{=} o(h) \Rightarrow f + g \overset{x \to x_0}{=} o(h)$

(b) Zeigen Sie: Ist $f \overset{x \to 0}{=} O(x)$, so gilt $f \overset{x \to 0}{=} o(1)$. Geben Sie außerdem ein Beispiel einer Funktion f mit $f \overset{x \to 0}{=} o(1)$ und $f \overset{x \to 0}{\neq} O(x)$ an.

(c) Seien $f_k : X_k \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei $X_k \subset \mathbb{R}$ den maximalen Definitionsbereich von f_k bezeichne. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ und $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein beliebiges Polynom. Zeigen Sie:

(i) $f_1(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f_1 \overset{x \to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, **(ii)** $f_2(x) = x\cos(x) \Rightarrow f_2 \overset{x \to 0}{=} o(1)$,
(iii) $f_3(x) = x^n \mathrm{e}^{-x} \Rightarrow f_3 \overset{x \to +\infty}{=} o(1)$, **(iv)** $p(x) \overset{x \to +\infty}{=} o(\mathrm{e}^x)$

Zusatzaufgaben

Bereiten Sie sich gut auf die Scheinklausur vor!

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de