Analysis 1 (WiSe 2019/20) — Blatt 15

Повторение - мать ученья

15.1. Sei $X \subset \mathbb{R}$ offen und $x_0 \in X$. Weiter seien $g : X \to \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}^n$ im Punkt x_0 m-fach differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass dann auch $h = f \cdot g$ im Punkt x_0 m-fach differenzierbar ist und dass

$$h^{(m)}(x_0) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} g^{(k)}(x_0) \cdot f^{(m-k)}(x_0)$$

gilt.

15.2. Beweisen oder widerlegen Sie

(a) $\sinh x + \cosh x = \mathcal{O}(\mathrm{e}^x)$ für $x \to +\infty$;

(b) $\arctan x - \frac{\pi}{2} = o(1)$ für $x \to +\infty$;

(c) $\cos x - 1 = \mathcal{O}(x^2)$ für $x \to 0$;

(d) $\sqrt{x} - \sqrt{x^2 + x} = o(x)$ für $x \to 0$.

15.3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0) = 0$ und

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \neq 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist für $x \neq 0$ und berechnen Sie f'.

(b) Zeigen Sie, dass f in $x = 0$ differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar ist und bestimmen Sie $f'(0)$.

15.4. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und gelte $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Sei weiter $x_0 \in (a, b)$. Zeigen Sie, dass dann für jedes $x \in (a, b)$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

15.5. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Zeigen Sie, dass für alle $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ die folgende Ungleichung von Jensen gilt.

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \tag{1}$$

Zeigen Sie zudem: Ist f strikt konvex, so gilt in (1) genau dann Gleichheit, wenn $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

15.6. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $x_0 \in (a, b)$ stetig ist.

15.7. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$.

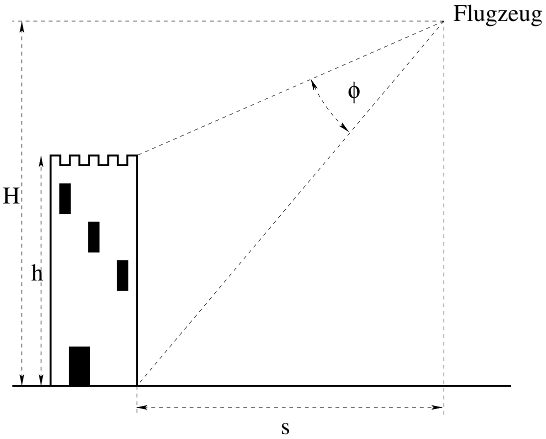
(a) Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima von f.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von **(a)**, dass f drei reelle Nullstellen besitzt.

15.8. Untersuchen Sie die Funktion $f : [-2, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x^3 - 3x + 2}$ auf lokale Extrema.

15.9. Ein Flugzeug fliegt geradlinig und waagerecht in der Höhe H über dem Erdboden.
In welcher Entfernung s von einem Turm der Großen Chinesischen Mauer mit Höhe $h < H$ sieht der Pilot den Turm unter maximalem Blickwinkel ϕ?

Hinweis: Satz von Fermat in Verbindung mit dem Cosinussatz.



15.10. Geben Sie jeweils ein (begründetes) Beispiel einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, welche nachfolgende Eigenschaft besitzt:

(a) f ist überall differenzierbar, ihre Ableitung f' besitzt aber eine Unstetigkeit.

(b) f ist in genau einem Punkt differenzierbar.

(c) f ist überall differenzierbar, es gilt $f'(0) > 0$ und jede Umgebung von 0 enthält ein Intervall, in dem f monoton fällt.

15.11. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Nutzen Sie dazu die Regel von l'Hôpital.

(a) $\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sqrt{1-x}}$

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log(x^m + 1)}{\log x^n}$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\log(x+1)} \right)$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \arctan x)^{\frac{1}{x}}$

(e) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\log x}}$

(f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x + \cos x - 1}{x}$

15.12. Sei $f(x) = x + \sin x \cos x$ und $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{\sin x}$. Überzeugen Sie sich, dass der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$ nicht existiert, wohl aber

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cos x}{x + \sin x \cos x + 2\cos x} \mathrm{e}^{-\sin x} = 0$$

gilt. Wieso ist die Regel von l'Hôpital nicht anwendbar?

15.13. Differentiation parametrischer Darstellungen von Kurven
Seien $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ und $\psi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ differenzierbare Funktionen. Weiter sei die Funktion $y = f(x)$ in parametrischer Darstellung

$$x(t) = \psi(t), \qquad y(t) = (f \circ \psi)(t)$$

gegeben.

(a) Sei $t_0 \in (\alpha, \beta)$ und $x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0)$. Zeigen Sie: Ist $\dot{x}(t_0) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big|_{t=t_0} \neq 0$, so gilt

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}.$$

Die Tangente an die durch $y = f(x)$ gegebene Kurve im Punkt (x_0, y_0) ist durch die Gleichung

$$Y - y_0 = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} (X - x_0)$$

definiert (wobei wir mit Y und X die laufenden Koordinaten bezeichnen).

(b) Sei $a > 0$. Das Bogenstück der Zykloide, welches durch

$$x(t) = a(t - \sin(t)), \qquad y = a(1 - \cos(t)), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

gegeben sei, beschreibt die Rollkurve, die ein Punkt auf dem Rand des Kreises mit Radius a beschreibt, wenn der Kreis auf der x-Achse abgerollt wird.
Skizzieren Sie die Kurve und berechnen Sie für jeden Punkt auf der Zykloide die Tangente. An welchen Punkten wird diese vertikal?
Hinweis: Die Zykloide kann in der Form $y = f(x)$ beschrieben werden, für die Aufgabe ist die genaue Form von f nicht relevant.