12

Ergänzungen

12.1 Differenzierbarkeit

Es gibt Funktionen auf $\mathbb{R}$, die stetig, aber *nirgends* differenzierbar sind. Ebenso gibt es Funktionen, deren Taylorreihe zwar überall konvergiert, aber nicht die Funktion darstellt. Hierzu die klassischen Beispiele.

▪ Stetig, aber nirgends differenzierbar

Sei ϕ_0 die mit der Periode 1 fortgesetzte Betragsfunktion auf $[-1/2, 1/2]$ wie in Abbildung 1. Es ist also

$$\phi_0 : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \phi_0(t) = |t - [t + 1/2]|\,,$$

wobei $[\cdot]$ die Gaußklammer bezeichnet. Diese Funktion ist stetig, stückweise affin auf Intervallen der Länge $1/2$ mit Steigung 1 oder -1, und periodisch mit Periode 1. Für $n \geqslant 1$ sei dann

$$\phi_n : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \phi_n(t) = 4^{-n}\phi_0(4^n t).$$

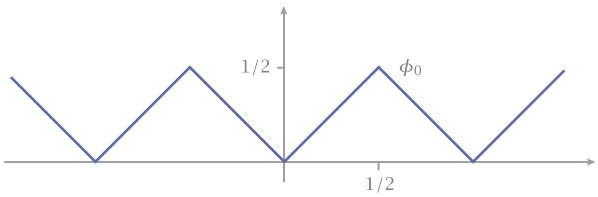
Auch diese Funktionen sind stetig, periodisch mit Periode 4^{-n}, und stückweise affin auf Intervallen der Länge $4^{-n}/2$ mit Steigungen 1 oder -1.

1 **Satz** *Die Funktion*

$$\phi : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \sum_{n \geqslant 1} \phi_n(t)$$

ist überall stetig, aber in keinem Punkt differenzierbar. ⋊

Abb 1 Die Funktion ϕ_0



⟨⟨⟨⟨⟨ Es ist

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \phi_k \right\|_{\mathbb{R}} \leqslant \sum_{k=n}^{m} \|\phi_k\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2} \sum_{k \geqslant n} 4^{-k} < 4^{-n}.$$

Also konvergiert die Reihe gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, und somit ist ϕ stetig $_{7.33}$.

Sei jetzt a ein beliebiger Punkt auf $\mathbb{R}$ und $n \geqslant 1$. Die Funktionen $\phi_1, .., \phi_n$ haben konstante Steigung auf Intervallen der Länge $4^{-n}/2$. Wählen wir also $h_n = 4^{-n}/4$ oder $h_n = -4^{-n}/4$ entsprechend, so gilt dies insbesondere auf dem Intervall zwischen a und $a + h_n$. Es ist dann

$$\left| \frac{\phi_k(a + h_n) - \phi_k(a)}{h_n} \right| = 1, \qquad k = 1, .., n.$$

Dagegen gilt

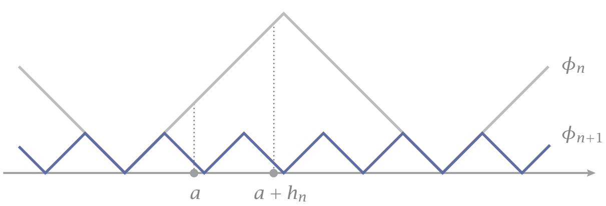
$$\phi_k(a + h_n) = \phi_k(a), \qquad k > n,$$

da alle ϕ_k mit $k > n$ periodisch mit Periode h_n sind. Es gilt somit

$$\frac{\phi(a + h_n) - \phi(a)}{h_n} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{\phi_k(a + h_n) - \phi_k(a)}{h_n},$$

und jeder Summand ist vom Betrag 1. Entlang $h_n \to 0$ bilden die Differenzenquotienten von ϕ zum Punkt a somit *keine* Cauchyfolge. Also ist ϕ im Punkt a auch nicht differenzierbar. ⟩⟩⟩⟩⟩

Abb 2 Zum Beweis von Satz 1



■ Glatt, aber nicht analytisch

2 **Das Beispiel von Cauchy** *Die Funktion*

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/t^2}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

ist unendlich oft differenzierbar, und es gilt $\phi^{(n)}(0) = 0$ *für alle* $n \geqslant 0$. *Insbesondere gilt* $T_0\phi \equiv 0 \neq \phi$ *auf* $\mathbb{R}^* \coloneqq \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ⋊

Die Taylorreihe dieser Funktion bei 0 verschwindet also identisch und konvergiert trivialerweise auf ganz $\mathbb{R}$. Aber natürlich ist die Funktion ϕ selbst nicht die Nullfunktion, wird also nicht von ihrer Taylorreihe dargestellt. Somit ist ϕ auch nicht reell analytisch.

⟨⟨⟨⟨ Auf $\mathbb{R}^*$ ist ϕ beliebig oft differenzierbar. Genauer zeigt man mit Induktion für alle $n \geqslant 0$, dass

$$\phi^{(n)}(t) = p_n(1/t)\,\mathrm{e}^{-1/t^2}, \qquad t \neq 0,$$

mit einem Polynom p_n vom Grad $\leqslant 3n$. Wegen $t^m \mathrm{e}^{-t} \to 0$ für $t \to \infty$ für alle $m \geqslant 0$ folgt hieraus

$$\lim_{t \to 0} \phi^{(n)}(t) = \lim_{t \to \infty} p_n(t)\,\mathrm{e}^{-t^2} = 0, \qquad n \geqslant 0.$$

Daraus folgt induktiv, dass $\phi^{(n)}$ in 0 stetig ist, dort auch differenzierbar ist, und dass $\phi^{(n+1)}(0) = 0$ gilt. ⟩⟩⟩⟩

Eine Variante dieses Beispiels ist die Funktion

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t^2/(1-t^2)}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geqslant 1, \end{cases}$$

die ebenfalls unendlich oft differenzierbar ist. Darüber hinaus verschwindet sie außerhalb von $[-1, 1]$ identisch. Ihr *Träger* $\operatorname{supp}\psi \coloneqq \{t \in \mathbb{R} : \psi(t) \neq 0\}^-$ ist also *kompakt*.

Der Raum aller $\mathbb{C}^\infty$-Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit kompakten Träger wird mit $C_0^\infty(\mathbb{R})$ bezeichnet und spielt in der Analysis eine wichtige Rolle. Wie die Funktion ψ zeigt, ist er nicht leer.

Abb 3

Das Beispiel von Cauchy

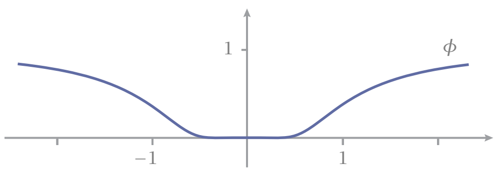
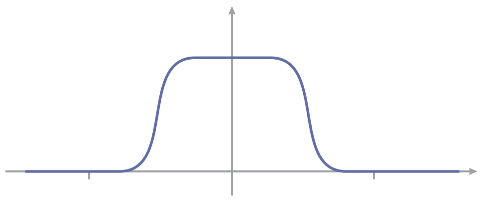


Abb 4

Eine $\mathbb{C}^\infty$-Funktion mit kompakten Träger



12.2 Faltungen

Wir betrachten stetige Funktionen auf der reellen Geraden, die beschränkt oder sogar absolut integrierbar sind. Für Erstere haben wir bereits den Raum

$$C_b(\mathbb{R}) \coloneqq \{f \in C(\mathbb{R}) : \|f\|_\infty < \infty\}$$

eingeführt, wobei

$$\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{-\infty<t<\infty} |f(t)|$$

die *Supremums-* oder *L^∞-Norm* von f bezeichnet. Für Letztere definieren wir den Raum

$$C_s(\mathbb{R}) \coloneqq \{f \in C(\mathbb{R}) : \|f\|_1 < \infty\},$$

wobei

$$\|f\|_1 \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

als die *L^1-Norm* von f bezeichnet wird.

Für eine beliebige stetige Funktion können beide Normfunktionen den Wert ∞ annehmen. Auch ist nicht jede stetige beschränkte Funktion integrierbar, und nicht jede stetige integrierbare Funktion ist beschränkt. Es gilt somit

$$C_s(\mathbb{R}) \not\subseteq C_b(\mathbb{R}), \qquad C_b(\mathbb{R}) \not\subseteq C_s(\mathbb{R}).$$

Bemerkung In Abschnitt 7.6 haben wir gezeigt, dass $C_b(\mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ein vollständiger normierter Raum ist. Der Raum $C_s(\mathbb{R})$ mit der L^1-Norm $\|\cdot\|_1$ ist zwar ebenfalls normiert, aber *nicht vollständig*. Denn es gibt Folgen in $C_s(\mathbb{R})$, die punktweise und bezüglich $\|\cdot\|_1$ gegen *nichtstetige* Funktionen konvergieren A-10.22. ⊸

Die Faltungsoperation

Die Faltungsoperation erzeugt mithilfe eines uneigentlichen Integrals aus zwei Funktionen eine neue Funktion.

12.4

3 **Definition** *Sei $f \in C_b(\mathbb{R})$ und $g \in C_s(\mathbb{R})$ oder umgekehrt. Dann ist die Faltung oder Konvolution von f und g erklärt als die Funktion*

$$f * g : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

mit

$$(f * g)(x) \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir müssen zeigen, dass das uneigentliche Integral für jedes x konvergiert. Ist zum Beispiel $f \in C_b(\mathbb{R})$ und $g \in C_s(\mathbb{R})$, so gilt für alle $r > 0$

$$\int_0^r |f(x-t)g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty \int_0^r |g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty \, \|g\|_1 \,.$$

Daraus folgt die Konvergenz des Integrals für $r \to \infty$ 10.20. Gleiches gilt für das Integral über $[-r, 0]$. Für den umgekehrten Fall argumentiert man entsprechend. Somit ist $f * g$ wohldefiniert. ⟩⟩⟩⟩⟩

Die Formulierung ›Faltung von f und g‹ ist symmetrisch in den Funktionen f und g, die Definition jedoch scheinbar nicht. Dies täuscht jedoch.

Lemma *Unter den Voraussetzungen der Faltungsoperation 3 gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R},$$

und somit $f * g = g * f$. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Die Substitution $t = x - s$ ergibt für jedes $r > 0$

$$\int_{-r}^{r} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{x+r}^{x-r} f(s)g(x-s)\,\mathrm{d}s = \int_{x-r}^{x+r} f(s)g(x-s)\,\mathrm{d}s.$$

Da die uneigentlichen Integrale für $r \to \infty$ auf beiden Seiten existieren, folgt hieraus durch Grenzübergang die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Der Faltungsoperator

Fixieren wir ein $\varphi \in C_s(\mathbb{R})$, so können wir jeder Funktion $f \in C_b(\mathbb{R})$ durch Faltung mit φ eine neue Funktion $f * \varphi$ zuordnen. Die Funktion φ definiert somit einen *Operator*

$$T_\varphi : \ f \mapsto T_\varphi f = f * \varphi.$$

Dieser Operator hat viele interessante und nützliche Eigenschaften, von denen wir hier einige wenige erwähnen.

4 **Satz** *Jede Funktion $\varphi \in C_s(\mathbb{R})$ definiert einen linearen Faltungsoperator*

$$T_\varphi : C_b(\mathbb{R}) \to C_b(\mathbb{R}), \quad T_\varphi f \coloneqq f * \varphi.$$

Dieser ist beschränkt, genauer gilt

$$\|T_\varphi f\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_1 \|f\|_\infty . \quad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir zeigen zuerst, dass $T_\varphi f$ wieder stetig ist. Fixiere ein beliebiges x, und betrachte

$$|T_\varphi f(x+h) - T_\varphi f(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h-t) - f(x-t)|\,|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Das rechts stehende Integral zerlegen wir in drei Teilintegrale über $(-\infty, -r]$, $[-r, r]$ und $[r, \infty)$, wobei r noch geeignet zu wählen ist.

Das linke und rechte Teilintegrale können wir durch

$$\|f\|_\infty \left\{ \int_{-\infty}^{-r} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t + \int_r^\infty |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \right\}$$

abschätzen. Da φ integrierbar ist, konvergiert der Ausdruck in Klammern für $r \to \infty$ gegen Null. Zu jedem gegebenen $\varepsilon > 0$ existiert daher ein $r > 0$ so, dass $\{\cdot\cdot\} < \varepsilon$ gilt. Der gesamte Ausdruck ist dann beschränkt durch $\varepsilon \|f\|_\infty$.

Bleibt noch das Integral

$$\int_{-r}^{r} |f(x+h-t) - f(x-t)|\,|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Für $|h| \leqslant 1$ wird f nur innerhalb eines kompakten Intervalls um x ausgewertet. Dort ist f aber *gleichmäßig* stetig $_{7.32}$. Zu dem bereits gegebenen $\varepsilon > 0$ existiert daher ein $0 < \delta \leqslant 1$ so, dass

$$|f(x+h-t) - f(x-t)| < \varepsilon, \qquad |h| < \delta,\ |t| \leqslant r.$$

Das letzte Integral ist dann durch $\varepsilon \|\varphi\|_1$ beschränkt.

Beide Abschätzungen zusammen ergeben

$$|T_\varphi f(x+h) - T_\varphi f(x)| \leqslant (\|f\|_\infty + \|\varphi\|_1)\varepsilon, \qquad |h| < \delta.$$

Da für jedes ε und solches δ existiert, ist $T_\varphi f$ im Punkt x stetig.

Wir zeigen nun, dass $T_\varphi f$ auch beschränkt ist. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|T_\varphi f(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t = \|f\|_\infty \|\varphi\|_1 .$$

Also gilt auch

$$\|T_\varphi f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |T_\varphi f(x)| \leqslant \|f\|_\infty \|\varphi\|_1 .$$

Da dies für jedes $f \in C_b(\mathbb{R})$ gilt, ist $T_\varphi f$ auch beschränkt. – Die Linearität von T_φ schließlich ist offensichtlich. ⟩⟩⟩⟩⟩

12.6

Das Interessante am Operator T_φ ist, dass sich viele Eigenschaften von der Funktion φ auf die gefaltete Funktion $T_\varphi f$ vererben, unabhängig von den Eigenschaften von f selbst. Ist zum Beispiel φ stetig differenzierbar und die Ableitung φ' ebenfalls auf ganz $\mathbb{R}$ integrierbar, so darf man in der folgenden Rechnung Differenziation und Integration vertauschen – was wir allerdings erst später beweisen werden– und erhält

$$\begin{aligned}(T_\varphi f)' = (f * \varphi)' &= \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x \varphi(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f * \varphi' \\ &= T_{\varphi'} f,\end{aligned}$$

wobei ∂_x die Ableitung nach x bezeichnet. Die Ableitung ∂_x operiert also auf φ und nicht auf f.

Entsprechendes gilt per Induktion auch für höhere Ableitungen. Sei dafür

$$C_b^r(\mathbb{R}) \coloneqq \{\varphi \in C^r(\mathbb{R}) : \varphi^{(r)} \in C_b(\mathbb{R})\}.$$

5 **Satz** *Sei $\varphi \in C^r(\mathbb{R})$ mit $\varphi^{(r)} \in C_s(\mathbb{R})$. Dann gilt*

$$T_\varphi :\ C_b(\mathbb{R}) \to C_b^r(\mathbb{R}),$$

und es ist

$$\partial^k T_\varphi f = T_{\partial^k \varphi} f, \qquad k = 0, .., r. \qquad \rtimes$$

Die Voraussetzung dieses Satzes ist zum Beispiel für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ für alle $r \geqslant 0$ erfüllt. Denn jede Ableitung von φ ist stetig, hat kompakten Träger wie φ und ist somit integrierbar. Wir erhalten damit folgendes

6 **Korollar** *Ist $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, so gilt*

$$T_\varphi :\ C_b(\mathbb{R}) \to C_b^\infty(\mathbb{R}). \qquad \rtimes$$

Wir werden diese beiden Sätze im Folgenden nicht benötigen – und daher auch nicht beweisen –, da wir mit dem Weierstraßschen Approximationssatz 8 eine noch stärkere Aussage beweisen werden.

12.3 Diracfolgen

Mithilfe von Faltungen lässt sich die Aufgabe elegant lösen, stetige Funktionen durch *glatte*, das heißt, unendlich oft differenzierbare Funktionen zu approximieren. Benötigt werden dazu Funktionen, die die Faltungsoperation auf immer kleinere Umgebungen eines Punktes konzentrieren.

Definition *Eine Folge (φ_n) von Funktionen in $C_s(\mathbb{R})$ heißt Diracfolge, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt.*

(D-1) $\varphi_n \geqslant 0$ *für alle n,*

(D-2) $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ *für alle n, und*

(D-3) $\int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \to 1$ *für jedes $\delta > 0$.* ⋊

Die ersten beiden Bedingungen bewirken, dass die Faltung mit jedem φ_n eine Mittelwertbildung darstellt. Die dritte Bedingung bringt zum Ausdruck, dass diese Mittelwertbildungen gegen eine Punktauswertung konvergieren. Denn aus (D-2) und (D-3) folgt für jedes $\delta > 0$ auch

$$\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Alles außerhalb von $[-\delta, \delta]$ wird somit asymptotisch mit 0 gewichtet.

Diracfolgen sind leicht zu beschaffen:

Lemma *Ist ψ eine stetige, nichtnegative Funktion mit kompaktem Träger und $\|\psi\|_1 = 1$, so wird durch*

$$\varphi_n(t) \coloneqq n\psi(nt), \qquad n \geqslant 1,$$

eine Diracfolge (φ_n) definiert. Ist ψ eine glatte Funktion, so sind auch alle φ_n glatt. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Offensichtlich ist $\varphi_n \geqslant 0$, und mit der Substitution $t = ns$ erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = n\int_{-\infty}^{\infty} \psi(nt)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s)\,\mathrm{d}s = 1.$$

Ist $\operatorname{supp}\psi \subset [-r, r]$, so ist $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [-r/n, r/n]$ und deshalb

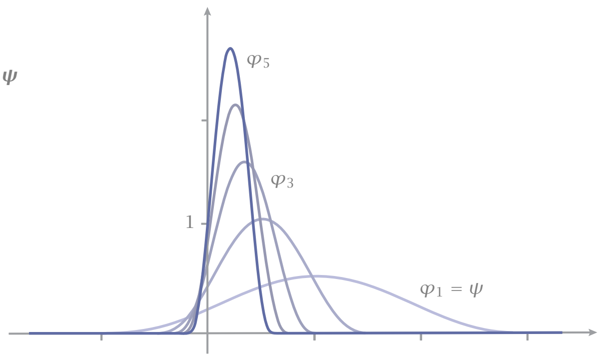
$$\int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = 1, \qquad n \geqslant r/\delta.$$

Die letzte Behauptung ist offensichtlich richtig. ⟩⟩⟩⟩⟩

12.8

Abb 5

Eine Diracfolge mit einer Startfunktion ψ mit Träger $[-1, 3]$



▪ Ein allgemeiner Approximationssatz

Faltungen einer *gleichmäßig* stetigen Funktion f mit den Funktionen einer beliebigen Diracfolge führen zu stetigen Funktionen f_n, die gleichmäßig gegen die Ausgangsfunktion f konvergieren.

7 **Approximationssatz** *Ist $f \in C_b(\mathbb{R})$ gleichmäßig stetig und (φ_n) eine Diracfolge, so gilt*

$$f * \varphi_n \rightrightarrows f. \quad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $f_n = f * \varphi_n$. Wegen (D-2) ist

$$f(x) = f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Mit (D-1) ist dann

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-t)|\ \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Dieses Integral zerlegen wir in einen Anteil über ein kleines Mittelstück $[-\delta, \delta]$ und den Rest.

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle x gleichmäßig

$$|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon, \qquad |t| < \delta.$$

Für das Mittelstück des Integrals erhalten wir damit

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x-t)|\ \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon, \tag{2}$$

denn es wird ja nur über $|t| \leqslant \delta$ integriert.

Wegen (D-2) können wir den Integralanteil über das Komplement von $[-\delta, \delta]$ beschränken durch

$$2\,\|f\|_\infty \left\{\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t\right\} = 2\,\|f\|_\infty \left\{1 - \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t\right\}.$$

Der letzte Ausdruck konvergiert wegen (D-3) für $n \to \infty$ gegen 0. Es gibt somit ein $N \geqslant 1$, so dass

$$\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} |f(x) - f(x-t)|\,\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon, \qquad n \geqslant N. \tag{3}$$

Die Abschätzungen (1), (2) und (3) ergeben zusammen $\|f_n - f\|_\infty < 2\varepsilon$ für $n \geqslant N$. Das war zu zeigen. »»»

▪ Approximation durch Polynome

Von den Funktionen einer Diracfolge wird nur verlangt, dass sie stetig sind. Sind sie aber glatt, so sind auch die Faltungen $f * \varphi_n$ glatt. Eine gleichmäßig stetige Funktionen f ist daher auch gleichmäßiger Limes glatter Funktionen. Die glattesten Funktionen sind die analytischen Funktionen, und unter diesen sind die Polynome die einfachsten. Dies führt zu der Frage, ob man eine beliebige stetige Funktion gleichmäßig durch *Polynome* approximieren kann. Auf einem unbeschränkten Intervall ist dies sicher nicht möglich, da dort jedes nicht konstante Polynom unbeschränkt ist. Für *kompakte* Intervalle dagegen gilt der

8 **Approximationssatz von Weierstraß** *Sei I ein kompaktes Intervall. Dann ist jede stetige Funktion auf I gleichmäßiger Limes von Polynomen.* ⋊

««« Zunächst bemerken wir, dass wir uns auf den Fall

$$I = [0,1], \qquad f(0) = 0 = f(1) \tag{4}$$

zurückziehen können. Denn ist f stetig auf $I = [a,b]$, so ist $g = f \circ u$ mit

$$u(t) = (1-t)a + tb$$

stetig auf $[0,1]$, und die Funktion $h = g - v$ mit

$$v(t) = (1-t)g(0) + tg(1)$$

verschwindet bei 0 und 1. Existieren nun Polynome q_n, die auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen h konvergieren, so sind $p_n = (q_n + v) \circ u^{-1}$ ebenfalls Polynome, die auf I gleichmäßig gegen $(h + v) \circ u^{-1} = f$ konvergieren. Somit können wir von (4) ausgehen.

Durch

$$F \coloneqq \begin{cases} f & \text{auf } [0,1], \\ 0 & \text{auf } \mathbb{R} \setminus [0,1], \end{cases}$$

setzen wir zuerst f zu einer gleichmäßig stetigen Funktion F auf $\mathbb{R}$ fort. Als Diracfolge wählen wir geeignete Polynome auf $[-1,1]$, nämlich

$$\varphi_n = \lambda_n^{-1}(1-t^2)^n, \qquad |t| \leqslant 1. \tag{5}$$

Diese setzen wir ebenfalls durch 0 auf die restliche reelle Gerade stetig fort und bezeichnen sie dort mit Φ_n. Wählen wir

$$\lambda_n \coloneqq \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t > 0,$$

so sind die Eigenschaften (D-1) und (D-2) offensichtlich erfüllt. Eigenschaft (D-3) zeigen wir im anschließenden Lemma 9.

Betrachte nun die Funktionen

$$p_n = F * \Phi_n.$$

Diese konvergieren gleichmäßig gegen F 7. Also konvergieren sie auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen f. Für $x \in [0,1]$ gilt außerdem

$$\begin{aligned}(F * \Phi_n)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\Phi_n(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t)\Phi_n(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda_n^{-1}\int_0^1 f(t)(1-(x-t)^2)^n\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

denn im Integral in der zweiten Zeile ist $|x-t| \leqslant 1$, und dort ist Φ_n durch (5) gegeben. Aufgrund der binomischen Formel 3.34 ist $(1-(x-t)^2)^n$ ein Polynom in x mit Koeffizienten, die von t abhängen. Nach Integration bezüglich t bleibt somit ein polynomialer Ausdruck in x. Mit anderen Worten, die p_n sind *Polynome*, und der Satz bis auf das folgende Lemma damit bewiesen. — Man beachte, dass der Beweis keinen Gebrauch macht von Satz 5. ⟫⟫⟫

9 **Lemma** *Für die Polynome* (5) *gilt*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \to 1, \qquad n \to \infty,$$

für jedes $\delta \in (0,1)$. ⋊