

# 17

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten nun allgemeine gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung in endlich-dimensionalen Räumen von der Form

$$\dot{x} = v(x).$$

Anders als im Fall linearer Differentialgleichungen gibt es hier in den meisten Fällen keine Darstellung von Lösungen mittels eines Exponentials oder Ähnlichem, und sogar ihre Existenz oder Eindeutigkeit sind meist nicht evident.

Man benötigt daher allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitssätze. Für die Existenz reicht schon die Stetigkeit der rechten Seite, und für die Eindeutigkeit deren lokale Lipschitzstetigkeit. Diese zieht dann auch die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten nach sich.

Eine Konsequenz der Existenz und Eindeutigkeit ist die Flusseigenschaft. Fasst man alle Lösungen zu einer Familie von Zeit- $t$ -Abbildungen  $\Phi^t$  zusammen, so gilt

$$\Phi^0 = id, \quad \Phi^{s+t} = \Phi^s \circ \Phi^t.$$

Dies ist die Verallgemeinerung der entsprechenden Eigenschaften der Familie der Zeit- $t$ -Abbildungen  $e^{At}$  für lineare Differentialgleichungen.

## 17.1

## Vektorfelder und Differenzialgleichungen

**Definition** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Ein **Vektorfeld** auf einem Gebiet  $\Omega \subset V$  ist eine Abbildung

$$v: \Omega \rightarrow V, \quad x \mapsto v(x). \quad \times$$

Ein Vektorfeld weist also jeden Punkt  $x$  im Definitionsbereich  $\Omega \subset V$  einen Vektor  $v(x)$  in *demselben* Vektorraum  $V$  zu. Daher definiert ein solches Feld eine *gewöhnliche Differenzialgleichung* auf  $\Omega$ .

**Definition** Ist  $v: \Omega \rightarrow V$  ein Vektorfeld auf einem Gebiet  $\Omega \subset V$ , so heißt

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

eine *gewöhnliche, autonome Differenzialgleichung erster Ordnung* auf  $\Omega$ . Eine *Lösung* dieser Differenzialgleichung ist eine stetig differenzierbare Kurve  $\varphi: I \rightarrow \Omega$  derart, dass

$$\dot{\varphi}(t) = v(\varphi(t)), \quad t \in I. \quad \times$$

Der Geschwindigkeitsvektor einer Lösung  $\varphi$  stimmt also in jedem Punkt mit dem dortigen Vektor des Vektorfeldes  $v$  überein. Die Menge  $\Omega$  selbst bezeichnet man in diesem Zusammenhang auch als *Phasen-* oder *Konfigurationsraum* der Differenzialgleichung.

**Bemerkungen** *a.* Jede differenzierbare Lösung ist auch *stetig* differenzierbar, da die Ableitung ja die Differenzialgleichung erfüllt.

*b.* Die Differenzialgleichung (1) heißt *gewöhnlich*, da ihre Lösungen  $\varphi$  Funktionen *einer* Variable  $t$  sind, die üblicherweise als Zeit interpretiert wird. Auf der anderen Seite stehen die *partiellen* Differenzialgleichungen, die Funktionen mehrerer Variablen und deren partielle Ableitungen betreffen. Sie heißt von *erster*

Abb 1 Zwei Vektorfelder und zwei Lösungskurven

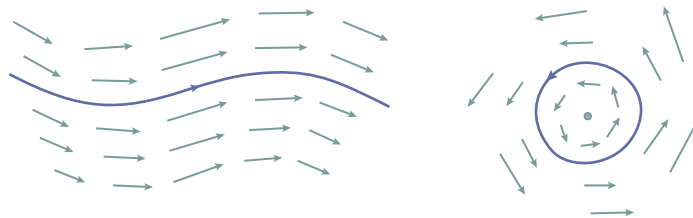
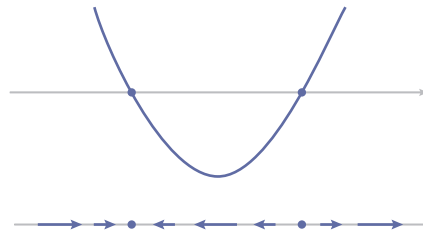


Abb 2

Eine skalare Funktion  
interpretiert als  
Vektorfeld



*Ordnung*, da nur die erste Ableitung nach  $t$  involviert ist. Und sie heißt *autonom*, da das Vektorfeld  $v$  nicht explizit von  $t$  abhängt.

c. Im Standardfall des  $\mathbb{R}^n$  ist (1) äquivalent zu einem System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= v_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= v_2(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= v_n(x_1, \dots, x_n),\end{aligned}$$

von  $n$  im Allgemeinen gekoppelten, nichtlinearen Differenzialgleichungen.  $\rightarrow$

► A. Jede reelle Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert eine skalare Differenzialgleichung  $\dot{x} = f(x)$  auf ihrem Definitionsbereich  $\text{Abb 2}$ . Das Polynom  $f(x) = x^2$  zum Beispiel definiert die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ihre allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$\varphi(t) = \frac{a}{1 - at}$$

mit  $a \in \mathbb{R}$  und  $at \neq 1$  - siehe Kapitel 11.

B. Ein linearer Operator  $A \in L(V)$  definiert ein lineares Vektorfeld auf  $V$ , nämlich  $A: x \mapsto Ax$ . Die zugehörige Differenzialgleichung ist

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in V.$$

Ihre allgemeine Lösung ist, wie wir gesehen haben, gegeben durch

$$\varphi(t) = e^{At}x_0, \quad x_0 \in V. \quad \blacktriangleleft$$

### ■ Weitere Differenzialgleichungen

Wir beschränken uns hier auf *autonome* Differenzialgleichungen *erster* Ordnung. Für die Frage der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen beispielsweise ist dies jedoch keine wesentliche Einschränkung, da sich andere Typen von Differenzialgleichungen in diese Form bringen lassen. Wir geben drei Beispiele, das allgemeine Vorgehen ergibt sich daraus.

► A. In Kapitel 11 haben wir nichtautonome Differenzialgleichungen

$$\dot{x} = f(t, x)$$

in einer Variablen betrachtet. Führen wir die Zeit als zusätzliche Koordinate  $x_0$  ein und setzen  $x_1 = x$ , so ist dies äquivalent zu dem autonomen System

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= 1, \\ \dot{x}_1 &= f(x_0, x_1).\end{aligned}$$

B. Eine skalare Differenzialgleichung höherer Ordnung wird zu einem System von Differenzialgleichungen erster Ordnung, indem man die höheren Ableitungen als zusätzliche Koordinaten einführt. So ist

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\dot{x} = f(x)$$

mit  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$  und  $x_3 = \ddot{x}$  äquivalent zu dem System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= f(x_1) - bx_2 - ax_3.\end{aligned}$$

C. Hängt ein Vektorfeld von Parametern ab, so kann man auch diese als zusätzliche Koordinaten einführen. So ist

$$\dot{x} = f(x, \lambda)$$

mit  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \lambda$  äquivalent zu dem System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= 0.\end{aligned}$$

Damit werden Sätze über die Abhängigkeit von Lösungen von Parametern auf solche über die Abhängigkeit von Lösungen von Anfangswerten zurückgeführt. ◀

### ■ Anfangswertprobleme

Bereits die Lösungen von elementaren Differenzialgleichungen sind nicht eindeutig, solange keine weiteren Daten vorgegeben werden. Dasselbe gilt natürlich auch hier. Eindeutigkeit kann man nur für *Anfangswertprobleme* erwarten.

**Definition** Unter einem zu einem Vektorfeld  $v$  auf  $\Omega$  gehörenden *Anfangswertproblem* – kurz *Awp* – versteht man das System

$$\dot{x} = v(x), \quad x(t_0) = x_0$$

mit einem  $x_0 \in \Omega$ . Eine *lokale Lösung* des Awps ist eine Lösung  $\varphi: I_0 \rightarrow \Omega$  dieser Differenzialgleichung mit  $t_0 \in I_0$  und  $\varphi(t_0) = x_0$ . ✕

- 1 ▶ A. Die Lösung von  $\dot{x} = ax$ ,  $x(0) = x_0$  auf der reellen Geraden ist

$$\varphi(t) = e^{at}x_0.$$

Sie existiert für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

- B. Die Lösung von  $\dot{x} = x^2$ ,  $x(0) = x_0$  ist

$$\varphi(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}.$$

Ist  $x_0 \neq 0$ , so ist diese für  $t \rightarrow 1/x_0$  unbeschränkt und daher nicht für alle  $t$  definiert. Es gibt also keine *globale* Lösung.

- C. Ist  $x_0$  ein *kritischer Punkt* des Vektorfeldes  $v$ , das heißt,

$$v(x_0) = 0,$$

so besitzt das zugehörige Awp immer die für alle  $t$  erklärte triviale Lösung

$$\varphi(t) \equiv x_0.$$

Diese wird auch als *Gleichgewichtslösung* bezeichnet, der Punkt  $x_0$  selbst als *Gleichgewichtspunkt*.

- D. Das lineare Awp  $\dot{x} = Ax$ ,  $x(0) = x_0$  besitzt die Lösung

$$\varphi(t) = e^{At}x_0.$$

Der Nullpunkt ist hier immer ein Gleichgewichtspunkt. ◀

Die Wahl des Anfangszeitpunktes  $t_0$  ist bei *autonomen* Differenzialgleichungen unerheblich. Denn ist  $\varphi$  eine Lösung von  $\dot{x} = v(x)$ , so ist auch

$$\dot{\varphi}(t - t_0) = v(\varphi(t - t_0)).$$

Die zeitliche verschobene Kurve ist also ebenfalls eine Lösung, und wir können erreichen, dass  $t_0 = 0$ .

Für nichtlineare Anfangswertprobleme lässt sich nur in wenigen Fällen eine Lösung explizit angeben. Man kann sogar beweisen, dass Lösungen in den meisten Fällen nicht durch ›geschlossene Ausdrücke‹ dargestellt werden können. Man benötigt daher allgemeine *Existenzsätze*. Sehr allgemein ist der

- 2 **Existenzsatz von Peano** *Ist das Vektorfeld  $v$  stetig, so besitzt jedes zugehörige Anfangswertproblem wenigstens eine lokale Lösung.* ✕

Wir benötigen diesen Satz im Folgenden nicht. Daher skizzieren wir einen Beweis in einer Übungsaufgabe <sub>A-7</sub>.

## 17.2

### Der Existenz- und Eindeigkeitssatz

Für den allgemeinen Existenz- und Eindeigkeitssatz benötigen wir einige technische Hilfsmittel. Wir beginnen mit der Umformulierung des Problems in eine *Integralgleichung*. Letztere ist analytisch wesentlich leichter zu handhaben. Insbesondere können wir hierauf den Banachschen Fixpunktsatz anwenden.

#### ■ Die Integralgleichung

- 3 **Lemma I** *Sei  $v: \Omega \rightarrow V$  ein stetiges Vektorfeld auf einem Gebiet  $\Omega$ . Dann ist  $\varphi: I \rightarrow \Omega$  eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{x} = v(x), \quad x(0) = x_0$$

*genau dann, wenn  $\varphi$  stetig ist und die Integralgleichung*

$$\varphi(t) = x_0 + \int_0^t v(\varphi(s)) \, ds$$

*für alle  $t \in I$  erfüllt.* ✕

⟨⟨⟨ Ist  $\varphi$  Lösung des Awps, so folgt aus dem Hauptsatz <sub>13.6</sub>

$$\begin{aligned} \varphi(t) - x_0 &= \varphi(t) - \varphi(0) \\ &= \int_0^t \dot{\varphi}(s) \, ds = \int_0^t v(\varphi(s)) \, ds. \end{aligned}$$

Gilt umgekehrt diese Gleichung für ein stetiges  $\varphi$ , so ist wiederum aufgrund des Hauptsatzes  $\varphi$  auch differenzierbar, und es ist

$$\dot{\varphi}(t) = v(\varphi(t)), \quad t \in I.$$

Außerdem ist offensichtlich  $\varphi(0) = x_0$ . ⟩⟩⟩

### ■ Das Lemma von Gronwall

Dieses Lemma spielt bei der Untersuchung von gewöhnlichen Differenzialgleichungen eine zentrale Rolle.

- 4 **Lemma von Gronwall** Ist  $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und gilt

$$u(t) \leq a + b \int_0^t u(s) \, ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

mit reellen Konstanten  $a$  und  $b$ , wobei  $b \geq 0$ , so ist

$$u(t) \leq ae^{bt}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad \times$$

⟨⟨⟨⟨ Setze

$$v(t) := a + b \int_0^t u(s) \, ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Dann ist  $v$  stetig differenzierbar und Dann ist  $u \leq v$  auf  $[0, T]$  – das ist genau die Annahme –, und  $v$  ist stetig differenzierbar. Für die Ableitung gilt, da  $b \geq 0$ ,

$$v' = bu \leq bv.$$

Folglich ist

$$(ve^{-bt})' = (v' - bv)e^{-bt} \leq 0.$$

Die Funktion  $ve^{-bt}$  ist also monoton fallend auf  $[0, T]$  und daher

$$v(t)e^{-bt} \leq v(t)e^{-bt} \Big|_{t=0} = v(0) = a, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Somit ist auch  $u(t) \leq v(t) \leq ae^{bt}$ . ⟩⟩⟩⟩

Im Fall  $a = 0$  erhalten wir folgendes

- 5 **Korollar** Ist  $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und gilt

$$0 \leq u(t) \leq b \int_0^t u(s) \, ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

mit einer reellen Zahl  $b \geq 0$ , so ist  $u \equiv 0$ .  $\times$

### ■ Banachscher Fixpunktsatz

Der letzte Hilfssatz ist tatsächlich ein fundamentales und mächtiges Werkzeug der Funktionalanalysis.

- 6 **Banachscher Fixpunktsatz** Sei  $X \subset E$  eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraums  $E$  mit Norm  $\|\cdot\|$ . Ist  $T: X \rightarrow X$  eine **Kontraktion** – das heißt,

$$\|T(u) - T(v)\| \leq \theta \|u - v\|, \quad u, v \in X.$$

mit einem  $\theta < 1$ , so besitzt  $T$  in  $X$  genau einen Fixpunkt.  $\times$

««« *Eindeutigkeit:* Sind  $p$  und  $q$  zwei Fixpunkte von  $T$  in  $X$ , so folgt

$$\|p - q\| = \|T(p) - T(q)\| \leq \theta \|p - q\|,$$

also  $(1 - \theta) \|p - q\| \leq 0$ . Wegen  $1 - \theta > 0$  impliziert dies  $\|p - q\| = 0$ . Also ist der Fixpunkt in  $X$  eindeutig.

*Existenz:* Wähle irgendeinen Punkt  $x_0 \in X$  und setze

$$x_n = T^n(x_0), \quad n \geq 1,$$

wobei  $T^n$  die  $n$ -fache Anwendung des Operators  $T$  bezeichnet. Mit Induktion folgt  $x_n \in X$  für alle  $n \geq 0$  sowie

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \theta \|x_n - x_{n-1}\| \leq \theta^n \|x_1 - x_0\|, \quad n \geq 0. \quad (2)$$

Für  $m > n \geq 0$  folgt hieraus

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \theta^k \|x_1 - x_0\| = \frac{\theta^n}{1 - \theta} \|x_1 - x_0\|. \end{aligned} \quad (3)$$

Somit bildet  $(x_n)$  eine Cauchyfolge in  $X$ . Aufgrund der Vollständigkeit von  $E$  besitzt diese Cauchyfolge einen Grenzwert  $p \in E$ , und aufgrund der Abgeschlossenheit von  $X$  gehört dieser ebenfalls zu  $X$ . Dieser Grenzwert ist ein Fixpunkt von  $T$ , denn (2) ist äquivalent mit

$$\|T(x_n) - x_n\| \leq \theta^n \|x_1 - x_0\|, \quad n \geq 0,$$

und mit  $x_n \rightarrow p$  und der Stetigkeit von  $T$  erhalten wir  $\|T(p) - p\| = 0$ . Damit ist alles gezeigt. »»»

Der Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes liefert nicht nur die Existenz des Fixpunktes, sondern gleichzeitig auch ein schnell konvergierendes Konstruktionsverfahren einschließlich Fehlerabschätzung.

- 7 **Zusatz zum Banachschen Fixpunktsatz** Jede Folge  $x_n = T^n(x_0)$  mit beliebigem Startwert  $x_0 \in X$  konvergiert gegen den eindeutigen Fixpunkt  $p$  von  $T$ , und es gilt

$$\|x_n - p\| \leq \frac{\theta^n}{1 - \theta} \|x_1 - x_0\|. \quad \times$$

««« Dies folgt aus (3) mit  $m \rightarrow \infty$  und  $x_m \rightarrow p$ . »»»



### ■ Eindeutigkeit

Wir wollen nun die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Awps

$$\dot{x} = v(x), \quad x(0) = x_0$$

für lipschitzstetige Vektorfelder  $v$  zeigen. Wie so oft, ist die Eindeutigkeit der leichtere Teil. Daher erledigen wir dies zuerst.

- 8 **Satz** *Ist  $v: V \rightarrow V$  lipschitzstetig, so ist jede Lösung des obigen Anfangswertproblems auf ihrem Existenzintervall eindeutig.* ✕

⟨⟨⟨ Seien  $\varphi, \psi$  zwei auf demselben Intervall  $I$  um 0 definierte Lösungen desselben Awps. Dann erfüllen beide die zugehörige Integralgleichung von Lemma I<sub>3</sub>, so dass

$$(\varphi - \psi)(t) = \int_0^t [v(\varphi(s)) - v(\psi(s))] ds, \quad t \in I.$$

Für  $t > 0$  folgt mit einer Lipschitzkonstanten  $L$  für  $v$  die Abschätzung

$$\|(\varphi - \psi)(t)\| \leq \int_0^t \|v(\varphi(s)) - v(\psi(s))\| ds \leq L \int_0^t \|(\varphi - \psi)(s)\| ds.$$

Für die stetige Funktion  $u(t) = \|(\varphi - \psi)(t)\|$  gilt somit

$$0 \leq u(t) \leq L \int_0^t u(s) ds.$$

Mit dem Korollar zum Lemma von Gronwall<sub>5</sub> folgt

$$\|(\varphi - \psi)(t)\| = 0, \quad t \in I \cap [0, \infty).$$

Für  $t \in I \cap (-\infty, 0]$  gilt Entsprechendes. Also ist  $\varphi = \psi$  auf  $I$ . ⟩⟩⟩

### ■ Existenz

Für den Existenzbeweis gehen wir nun davon aus, dass das Vektorfeld  $v$  auf ganz  $V$  erklärt und gleichmäßig lipschitzstetig ist. Dies vermeidet technische Komplikationen, da Lösungen in endlicher Zeit nicht unbeschränkt werden können. Den allgemeinen Fall führen wir später auf diesen zurück.

- 9 **Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz** *Ist das Vektorfeld  $v$  gleichmäßig lipschitz auf ganz  $V$ , so besitzt jedes Anfangswertproblem eine für alle Zeiten definierte eindeutige Lösung.* ✕

⟨⟨⟨ Wir schreiben das zu lösende Awp als Integralgleichung für die Kurve  $\varphi$ , also

$$\varphi(t) = x_0 + \int_0^t v(\varphi(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

Diese fassen wir als Fixpunktgleichung eines Operators  $T$  auf einem geeigneten Raum  $E$  stetiger Kurven auf.

Sei dazu  $L$  eine globale Lipschitzkonstante von  $v$  und

$$E = \{\varphi \in C(\mathbb{R}, V) : \|\varphi\|_L < \infty\}$$

der Raum aller stetigen Kurven  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow V$  mit endlicher *gewichteter Norm*

$$\|\varphi\|_L := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varphi(t)\| e^{-2L|t|}.$$

Eine Cauchyfolge in diesem Raum konvergiert gleichmäßig auf jedem beschränkten  $t$ -Intervall  $I$ . Daher bildet  $E$  mit dieser Norm einen Banachraum  $A^{-1}$ .

Die Teilmenge aller solcher Kurven mit Anfangswert  $x_0$ ,

$$X = \{\varphi \in E : \varphi(0) = x_0\} \subset E,$$

ist abgeschlossen in  $E$ . Definieren wir den Operator  $T$  auf  $X$  durch

$$(T\varphi)(t) = x_0 + \int_0^t v(\varphi(s)) \, ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

so ist  $\varphi$  eine Lösung des Awps genau dann, wenn  $\varphi \in X$  und  $T\varphi = \varphi$ .

Wir zeigen die Existenz eines solchen Fixpunkts mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes  $\S 6$ . Zwei Dinge sind hierfür zu zeigen.

*a.  $T$  ist wohldefiniert und bildet  $X$  in sich ab* Offensichtlich ist  $\psi = T\varphi$  eine stetige Kurve in  $V$  mit  $\psi(0) = x_0$ . Damit  $\psi$  auch wieder zu  $X$  gehört, müssen wir  $\|\psi\|_L < \infty$  zeigen. — Nun ist

$$\begin{aligned} \|\psi(t) - x_0\| &\leq \int_0^{|t|} \|v(\varphi(s))\| \, ds \\ &\leq \int_0^{|t|} (\|v(\varphi(s)) - v(x_0)\| + \|v(x_0)\|) \, ds \\ &\leq \int_0^{|t|} (L \|\varphi(s) - x_0\| + \|v(x_0)\|) \, ds. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\|\varphi(s) - x_0\| \leq \|\varphi - x_0\|_L e^{2L|s|}$$

aufgrund der Definition von  $\|\cdot\|_L$  und  $\int_0^{|t|} L e^{2Ls} \, ds \leq \frac{1}{2} e^{2L|t|}$ . Damit erhalten wir

$$\|\psi(t) - x_0\| \leq \|\varphi - x_0\|_L e^{2L|t|} + |t| \|v(x_0)\|.$$

Also ist

$$\|\psi - x_0\|_L = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\psi(t) - x_0\| e^{-2L|t|} < \infty.$$

*b.  $T$  ist eine Kontraktion auf  $X$*  Seien  $\varphi, \psi \in X$ . Aufgrund der Integralgleichung gilt dann

$$\begin{aligned} \|(T\varphi - T\psi)(t)\| &\leq \int_0^{|t|} \|v(\varphi(s)) - v(\psi(s))\| \, ds \\ &\leq \int_0^{|t|} L \|\varphi(s) - \psi(s)\| \, ds \\ &\leq \|\varphi - \psi\|_L \int_0^{|t|} L e^{2Ls} \, ds \\ &\leq \frac{1}{2} \|\varphi - \psi\|_L e^{2L|t|}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\|T\varphi - T\psi\|_L = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|(T\varphi - T\psi)(t)\| e^{-2L|t|} \leq \frac{1}{2} \|\varphi - \psi\|_L.$$

Somit ist  $T: X \rightarrow X$  eine Kontraktion mit dem Faktor  $1/2$ .

*Schluss* Somit ist der Banachsche Fixpunktsatz  $\text{\textcircled{6}}$  anwendbar, und  $T$  besitzt einen eindeutigen Fixpunkt  $\varphi \in X$ . Dieser ist die gesuchte Lösung des Awps. Deren Eindeutigkeit hatten wir bereits gezeigt  $\text{\textcircled{8}}$ .  $\text{\textcircled{>>>>}}$

Der Banachsche Fixpunktsatz liefert mit seinem Zusatz  $\text{\textcircled{7}}$  zugleich ein Verfahren zur *Konstruktion* eines Fixpunktes von  $T$ . Im Zusammenhang mit gewöhnlichen Differentialgleichungen ist dies bekannt als das *Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf*.

- 10 Satz von Picard-Lindelöf** Sei  $v$  ein lipschitzstetiges Vektorfeld auf  $V$ . Dann ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = v(x), \quad x(0) = x_0,$$

der Limes der Folge von Kurven  $T^n x_0$  mit

$$(T\varphi)(t) = x_0 + \int_0^t v(\varphi(s)) \, ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Diese Folge konvergiert gleichmäßig auf jedem kompakten Zeitintervall gegen die Lösung.  $\times$

$\text{\textcircled{>>>>}}$  Der Zusatz zum Banachschen Fixpunktsatz  $\text{\textcircled{7}}$  sagt aus, dass für jeden beliebigen Startwert  $\varphi_0 \in X$  die Folge  $(T^n \varphi_0)_{n \geq 0}$  in der Norm des Banachraumes  $E$  gegen den Fixpunkt  $\varphi \in X$  von  $T$  konvergiert. Ein solcher Startwert ist zum Beispiel die konstante Kurve  $\varphi_0 \equiv x_0$ , und Konvergenz in der Norm  $\|\cdot\|_L$  impliziert gleichmäßige Konvergenz auf jedem kompakten  $t$ -Intervall.  $\text{\textcircled{>>>>}}$

► Jedes lineare Vektorfeld

$$A: V \rightarrow V, \quad x \mapsto Ax$$

ist global lipschitzstetig. Wenden wir das Picard-Lindelöfsche Iterationsverfahren auf das zugehörige Awp an, so erhalten wir  $\varphi_0(t) \equiv x_0$ ,

$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_0^t A\varphi_0(s) \, ds = x_0 + Atx_0,$$

$$\varphi_2(t) = x_0 + \int_0^t A\varphi_1(s) \, ds = x_0 + Atx_0 + \frac{1}{2}A^2t^2x_0,$$

und allgemein mit Induktion

$$\varphi_n(t) = \left( \sum_{k=0}^n \frac{A^k t^k}{k!} \right) x_0.$$

Im Limes erhält man die Lösung  $\varphi(t) = e^{At}x_0$ , wobei wir aufgrund des letzten Satzes bereits wissen, dass diese Reihe auf jedem kompakten  $t$ -Intervall gleichmäßig konvergiert. ◀

#### ■ Der nichtautonome Fall

Die Beweise der letzten drei Sätze bleiben *unverändert* gültig, wenn das Vektorfeld zusätzlich stetig von der Zeit  $t$  abhängt. Lipschitzstetigkeit in  $t$  ist *nicht* erforderlich, wir müssen lediglich verlangen, dass die Lipschitzstetigkeit in der Ortsvariablen  $x$  gleichmäßig für alle  $t$  gilt.

- 11 **Zusatz** *Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz 9 und der Satz von Picard-Lindelöf 10 gelten ebenfalls für nichtautonome Vektorfelder*

$$v: \mathbb{R} \times V \rightarrow V, \quad (t, x) \mapsto v(t, x),$$

*die stetig in der Zeitvariable und gleichmäßig lipschitzstetig in der Ortsvariable in dem Sinne sind, dass es ein  $L \geq 0$  gibt, so dass*

$$\|v(t, x) - v(t, y)\| \leq L \|x - y\|$$

*für alle  $x, y \in V$  und  $t \in \mathbb{R}$ . ✕*

### ■ Stetige Abhängigkeit

Bis jetzt haben wir die Lösungen eines Anfangswertproblems als individuelle Kurven betrachtet, also als Funktionen nur von  $t$ . Nun betrachten wir sie auch als Funktion des Anfangswerts  $x_0$ . Dies machen wir sichtbar, indem wir  $\varphi(t, x_0)$  oder  $\varphi^t(x_0)$  oder  $\varphi_{x_0}(t)$  für die Lösung zum Anfangswert  $x_0$  schreiben. Die Integralgleichung  $_3$  lautet damit

$$\varphi^t(x_0) = x_0 + \int_0^t v(\varphi^s(x_0)) ds.$$

- 12 **Stetigkeitssatz** Sei  $v$  ein  $L$ -Lipschitzstetiges Vektorfeld auf ganz  $V$ . Für seine Lösungskurven gilt dann

$$\|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\| \leq e^{L|t|} \|x - y\|$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  und alle  $x, y \in V$ . ✕

««« Aus den Integralgleichungen für  $\varphi^t(x)$  und  $\varphi^t(y)$  folgt für  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\| &\leq \|x - y\| + \int_0^t \|v(\varphi^s(x)) - v(\varphi^s(y))\| ds \\ &\leq \|x - y\| + L \int_0^t \|\varphi^s(x) - \varphi^s(y)\| ds. \end{aligned}$$

Wenden wir das Lemma von Gronwall  $_4$  auf

$$u(t) = \|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\|$$

an, so erhalten wir die Behauptung für  $t \geq 0$ . Den Fall  $t \leq 0$  führt man hierauf zurück. »»»

*Bemerkungen* a. Das exponentielle Anwachsen der oberen Schranke ist im Allgemeinen nicht zu verbessern. Für die Lösungen von  $\dot{x} = ax$  auf  $\mathbb{R}$  mit  $a \neq 0$  gilt ja bereits

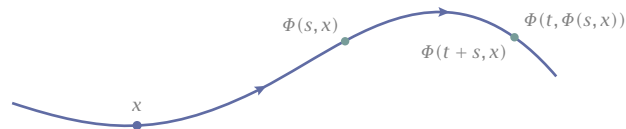
$$|\varphi^t(x_0) - \varphi^t(0)| = |e^{at}x_0 - e^{at}0| = e^{at} |x_0 - 0|.$$

Entsprechendes gilt, wenn man lineare Differenzialgleichungen  $\dot{x} = Ax$  mit Diagonalmatrizen  $A$  betrachtet.

b. Fixieren wir ein kompaktes Zeitintervall  $[a, b]$  um 0, so hängen die Lösungen *gleichmäßig* vom Anfangswert ab. Denn es gilt ja

$$\|\varphi_x - \varphi_y\|_{[a, b]} = \sup_{t \in [a, b]} \|\varphi_x(t) - \varphi_y(t)\| \leq e^{L(b-a)} \|x - y\|.$$

Abb 3 Flusseigenschaft



Auf einem beschränkten Zeitintervall ist der Abstand verschiedener Lösungskurven also gleichmäßig klein, wenn nur ihre Anfangswerte hinreichend kleinen Abstand haben.

c. Mit der im Beweis des Existenzsatzes  $\varphi$  eingeführten Norm  $\|\varphi\|_L$  folgt aus dem Stetigkeitssatz auch

$$\|\varphi_x - \varphi_y\|_L \leq \|x - y\|.$$

Der Operator

$$I: V \rightarrow E, \quad x \mapsto \varphi_x,$$

der jedem Anfangswert in  $x \in V$  seine entsprechende Lösungskurve  $\varphi_x \in E$  zuordnet, ist also *lipschitzstetig* bezüglich  $\|\cdot\|_L$ . Dies bedeutet jedoch *nicht*, dass die Lösungen auf ganz  $\mathbb{R}$  in der Supremumsnorm stetig von den Anfangswerten abhängen!

d. Vielmehr ist es so, dass auf *beliebig langen* Zeitintervallen noch so kleine Abstände exponentiell anwachsen können. Dies ist der sogenannte *Effekt der empfindlichen Abhängigkeit von den Anfangswerten* und die Ursache chaotischen Verhaltens, das in vielen Systemen beobachtet werden kann.  $\rightarrow$

### 17.3

#### Flüsse

Ist das Vektorfeld  $v$  lipschitz auf  $V$ , so definieren alle seine – eindeutigen – Lösungskurven zu allen Anfangswerten zusammen eine Abbildung

$$\Phi: \mathbb{R} \times V \rightarrow V, \quad \Phi(t, x) = \varphi^t(x) = \varphi_x(t),$$

genannt der *Fluss* oder die *Flussabbildung* des Vektorfeldes. Aufgrund des Stetigkeitssatzes  $_{12}$  ist sie stetig in  $x$ , und aufgrund der Konstruktion sogar differenzierbar in  $t$ .

- 13 **Flusssatz** Ist das Vektorfeld  $v$  lipschitz auf  $V$ , so gilt für seine Flussabbildung

$$\Phi(0, x) = x,$$

$$\Phi(t + s, x) = \Phi(t, (\Phi(s, x)))$$

für alle  $x \in V$  und alle  $s, t \in \mathbb{R}$ .  $\times$

«» Da  $\Phi(t, x)$  die Lösungskurve zum Anfangswert  $x$  bezeichnet, ist natürlich  $\Phi(0, x) = x$  für alle  $x$ . Betrachten wir beide Seiten der zweiten Gleichung als Funktion von  $t$  bei festem  $s$ , so sind *beide* Lösungskurven desselben Vektorfeldes  $v$  mit demselben Anfangswert  $\Phi(s, x)$  bei  $t = 0$ . Denn es gilt ja

$$\Phi(t + s, x)' = v(\Phi(t + s, x))$$

und

$$\Phi(t, \Phi(s, x))' = v(\Phi(t, \Phi(s, x))).$$

Aufgrund des Eindeutigkeitsatzes 8 stimmen beide Seiten somit überein. »»»

Die Gleichung

$$\Phi(t + s, x) = \Phi(t, (\Phi(s, x)))$$

bedeutet, dass es keinen Unterschied macht, ob ich vom Punkt  $x$  der Lösungskurve bis zum Zeitpunkt  $s$  folge und  $\Phi(s, x)$  als Anfangswert einer weiteren Lösungskurve bis zum Zeitpunkt  $t$  wähle, oder ob ich gleich von  $x$  ohne Zwischenstopp bis zum Zeitpunkt  $t + s$  fortschreite Abb 3.

#### ■ Zeit- $t$ -Abbildungen

Wir wechseln jetzt die Perspektive und betrachten die Flussabbildung nicht als Bündel von Lösungskurven, sondern als Familie von *Zeit- $t$ -Abbildungen*

$$\Phi^t : V \rightarrow V, \quad x \mapsto \Phi^t(x) = \Phi(t, x).$$

Diese bildet also jeden Punkt  $x \in V$  auf den Punkt  $\Phi^t(x)$  der Lösungskurve mit Anfangswert  $x$  ab.

- 14 **Satz** Die Familie der Zeit- $t$ -Abbildungen  $(\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$  eines lipschitzstetigen Vektorfeldes auf  $V$  bildet eine 1-Parametergruppe von Homöomorphismen von  $V$ . Das heißt, jedes  $\Phi^t$  ist ein Homöomorphismus von  $V$ , und es gilt

$$\Phi^0 = id, \quad \Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s$$

für alle  $t, s \in \mathbb{R}$ .  $\times$

⟨⟨⟨ Die Identitäten sind gleichbedeutend mit denen des Flusssatzes 13 und müssen nicht mehr bewiesen werden. Aus ihnen folgt insbesondere

$$\Phi^t \circ \Phi^{-t} = \Phi^{t-t} = \Phi^0 = \Phi^{-t+t} = \Phi^{-t} \circ \Phi^t.$$

Wegen  $\Phi^0 = id$  ist also  $\Phi^t$  umkehrbar, und die Umkehrabbildung ist

$$(\Phi^t)^{-1} = \Phi^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Da diese stetig sind, ist jede Zeit- $t$ -Abbildung ein Homöomorphismus von  $V$ . ⟩⟩⟩

*Bemerkungen* a. Der Fluss eines Vektorfeldes definiert somit einen *Homomorphismus* der additiven Gruppe  $\mathbb{R}$  in die Gruppe  $\text{Hom}(V)$  der Homöomorphismen auf  $V$ :

$$\Phi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\text{Hom}(V), \circ), \quad t \mapsto \Phi^t.$$

Eine solche Familie von Abbildungen wird auch als *dynamisches System mit kontinuierlicher Zeit* bezeichnet.

b. Der Satz verallgemeinert das entsprechende Resultat für lineare Vektorfelder  $A$ . Dort war ja

$$\Phi^t = e^{At} : V \rightarrow V$$

eine 1-Parametergruppe von *linearen* Isomorphismen von  $V$ . Die Gruppenstruktur war dort eine algebraische Identität, die wir ohne den EE-Satz zeigten.  $\rightarrow$

#### ■ Differenzierbarkeit

Ein lipschitzstetiges Vektorfeld generiert also eine 1-Parametergruppe von *Homöomorphismen* des Vektorraumes  $V$ . Ist das Vektorfeld darüber hinaus stetig differenzierbar, so gilt dasselbe auch für seine Flussabbildung.

- 15 **Satz** *Ist das lipschitzstetige Vektorfeld  $v$  auf  $V$  stetig differenzierbar, so ist jede Zeit- $t$ -Abbildung  $\Phi^t$  seines Flusses ein Diffeomorphismus von  $V$ .  $\times$*

Da wir bereits wissen, dass es sich bei den Zeit- $t$ -Abbildungen um Homöomorphismen handelt, ist nur noch deren stetige Differenzierbarkeit zu zeigen. Es genügt daher, Folgendes zu beweisen.

- 16 **Proposition** *Ist das lipschitzstetige Vektorfeld  $v$  stetig differenzierbar, so ist jede Zeit- $t$ -Abbildung  $\Phi^t$  seines Flusses ebenfalls stetig differenzierbar. Seine Ableitung  $\Lambda^t := D\Phi^t(x)$  ist die eindeutige Lösung des nichtautonomen linearen Anfangswertproblems*

$$\dot{\Lambda} = A(t)\Lambda, \quad \Lambda(0) = \text{Id}, \tag{4}$$

mit  $A(t) := Dv(\Phi^t(x))$ .  $\times$



Dieses Awp ergibt sich wie folgt. Falls wir die Differenzialgleichung

$$\dot{\Phi}^t(x) = v(\Phi^t(x))$$

nach  $x$  differenzieren und Differenziation nach  $x$  und  $t$  vertauschen dürfen, so erhalten wir die Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} (D\Phi^t(x))' &= D(\dot{\Phi}^t(x)) \\ &= D(v(\Phi^t(x))) \\ &= Dv(\Phi^t(x))D\Phi^t(x). \end{aligned}$$

Ihr Anfangswert ist  $D\Phi^0(x) = \text{Id}$ , da ja  $\Phi^0 = \text{id}$ . Fixieren wir also  $x$ , so erhalten wir genau das behauptete Awp für  $\Lambda(t) := D\Phi^t(x)$ .

Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung ist kein Problem:

- 17 **Lemma** *Ist das Vektorfeld  $v$  auf  $V$  lipschitz und  $C^1$ , so besitzt das Anfangswertproblem (4) eine für alle  $t$  definierte eindeutige Lösung.  $\times$*

««« Ist  $v$  stetig differenzierbar, so ist die Abbildung

$$A: \mathbb{R} \rightarrow L(V), \quad A(t) = Dv(\Phi^t(x))$$

stetig und gleichmäßig beschränkt in der Operatornorm von  $L(V)$  durch die globale Lipschitzkonstante von  $v$ . Somit können wir  $\dot{\Lambda} = A(t)\Lambda$  auffassen als eine stetig von  $t$  abhängende lipschitzstetige Differenzialgleichung auf dem Vektorraum  $L(V)$ . Der Zusatz zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz<sup>11</sup> liefert dazu die gewünschte eindeutige Lösung. »»»

««« *Beweis der Proposition* Wir zeigen, dass

$$W^t(h) := \Phi^t(x+h) - \Phi^t(x) - \Lambda^t h = o(\|h\|).$$

Dann ist  $\Lambda^t$  von (4) die Ableitung der Flussabbildung. — Aufgrund des Hauptsatzes gilt

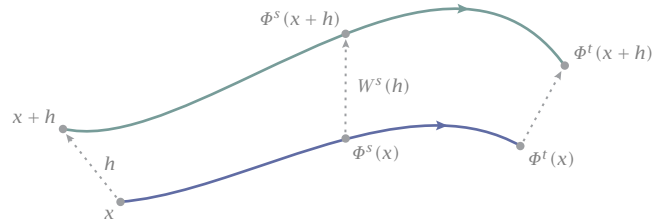
$$\begin{aligned} \Lambda^t h &= h + \int_0^t A(s)\Lambda^s h \, ds, \\ \Phi^t(x) &= x + \int_0^t v(\Phi^s(x)) \, ds, \\ \Phi^t(x+h) &= x+h + \int_0^t v(\Phi^s(x+h)) \, ds. \end{aligned}$$

Also ist

$$W^t(h) = \int_0^t (v(\Phi^s(x+h)) - v(\Phi^s(x)) - A(s)\Lambda^s h) \, ds.$$

Abb 4

Zum Beweis der Proposition



Mit  $\Delta^s h = \Phi^s(x+h) - \Phi^s(x) - W^s(h)$  wird dies zu

$$\begin{aligned} W^t(h) &= \int_0^t (\nu(\Phi^s(x+h)) - \nu(\Phi^s(x)) - A(s)(\Phi^s(x+h) - \Phi^s(x))) \, ds \\ &\quad + \int_0^t A(s)W^s(h) \, ds \\ &= \int_0^t \Delta(s) \, ds + \int_0^t A(s)W^s(h) \, ds \end{aligned}$$

mit

$$\Delta(s) = \nu(\Phi^s(x+h)) - \nu(\Phi^s(x)) - A(s)(\Phi^s(x+h) - \Phi^s(x)).$$

Aufgrund der gleichmäßigen Lipschitzstetigkeit von  $\nu$  ist  $\|A(s)\| \leq L$  für alle  $s$  und  $x$ . Also folgt

$$\|W^t(h)\| \leq \int_0^t \|\Delta(s)\| \, ds + L \int_0^t \|W^s(h)\| \, ds.$$

Mit einer Variante des Lemmas von Gronwall<sub>A-12</sub> gilt dann

$$\|W^t(h)\| \leq \int_0^t \|\Delta(s)\| e^{L(t-s)} \, ds.$$

Mit  $A(s) = D\nu(\Phi^s(x))$  und dem Mittelwertsatz ist nun

$$\|\Delta(s)\| \leq \sup_{\xi \in I(s)} \|D\nu(\xi) - D\nu(\Phi^s(x))\| \|\Phi^s(x+h) - \Phi^s(x)\|$$

mit  $I(s) = [(\Phi^s(x+h), \Phi^s(x))]$ . Aufgrund des Stetigkeitssatzes<sub>12</sub> ist

$$\|\Phi^s(x+h) - \Phi^s(x)\| = O(\|h\|).$$

Andererseits gilt  $\xi \rightarrow \Phi^s(x)$  für  $h \rightarrow 0$ , und deshalb

$$\|D\nu(\xi) - D\nu(\Phi^s(x))\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Also ist  $\|\Delta^t(h)\| = o(\|h\|)$  und damit  $\|W^t(h)\| = o(\|h\|)$ , wie zu zeigen war.  $\gggg$

### ■ Variationsgleichung

Für die Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten ergibt sich daraus Folgendes. Setzen wir

$$\xi(t) = D\Phi^t(x)h = \Lambda(t)h,$$

so gilt

$$\Phi^t(x+h) = \Phi^t(x) + \xi(t) + o(h),$$

wobei die Kurve  $\xi$  der *Variationsgleichung*

$$\dot{\xi} = A(t)\xi, \quad \xi(0) = h,$$

entlang der Kurve  $\Phi^t(x)$  genügt. Sie beschreibt in erster Näherung die Änderung einer Lösungskurve bei kleinen Änderungen des Anfangswertes.

### ■ Höhere Regularität

Besitzt das Vektorfeld höhere Regularitätseigenschaften, so vererben sich diese auf den Fluss.

- 18 **Satz** *Ist das Vektorfeld  $v$  auf  $V$  von der Klasse  $C^r$ , wobei  $1 \leq r \leq \infty$ , so ist seine Flussabbildung  $\Phi$  ebenfalls  $C^r$ .  $\times$*

⟨⟨⟨ Für  $r = 1$  ist die Behauptung bereits bewiesen<sub>15</sub>. Wir gehen daher induktiv davon aus, dass die Behauptung für irgendein  $r \geq 1$  gilt, und beweisen deren Gültigkeit für  $r + 1$ .

Sei also  $v$  ein  $C^{r+1}$ -Vektorfeld. Betrachte das Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v(x), \\ \dot{u} &= Dv(x)u, \end{aligned} \tag{5}$$

und das zugehörige Vektorfeld

$$w : V \times V \rightarrow V \times V, \quad w(x, u) = \begin{pmatrix} v(x) \\ Dv(x)u \end{pmatrix}.$$

Dieses ist  $C^r$  auf  $V \times V$ . Also ist nach Induktionsannahme auch seine Flussabbildung  $\Psi$  von der Klasse  $C^r$ . Diese Flussabbildung ist aber gerade

$$\Psi^t(x, u) = \begin{pmatrix} \Phi^t(x) \\ D\Phi^t(x)u \end{pmatrix},$$

denn die zweite Gleichung in (5) ist gerade die Variationsgleichung der ersten Gleichung<sub>16</sub>. Also ist nach Induktionsannahme  $D\Phi^t$  eine  $C^r$ -Abbildung. Dasselbe gilt für  $\dot{\Phi}^t$  aufgrund der Differenzialgleichung. Also ist  $\Phi$  selbst eine  $C^{r+1}$ -Abbildung, und die Induktion ist abgeschlossen.  $\gggg$

## 17.4

## Der lokale EE-Satz

Bis jetzt gingen wir davon aus, dass ein Vektorfeld auf ganz  $V$  definiert und dort lipschitz ist. Das ist natürlich nicht immer der Fall.

► A. Die Differenzialgleichung  $\dot{x} = x^2$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  erklärt, aber nicht gleichmäßig lipschitzstetig. Tatsächlich hat jede nichttriviale Lösung

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}, \quad x_0 \neq 0,$$

eine Singularität.

B. Die Differenzialgleichung  $\dot{x} = x^{-2}$  hat eine Singularität im Punkt 0, und die Lösung

$$x(t) = \sqrt[3]{3t + 1}$$

erreicht diesen Punkt in endlicher Zeit, verlässt also den Definitionsbereich der Differenzialgleichung. ◀

Lösungen existieren im Allgemeinen also nicht für alle Zeiten. Aber jedes Anfangswertproblem eines *lokal lipschitzstetigen* Vektorfeldes besitzt immer eine eindeutige lokale und sogar *maximale Lösung*. Dazu benötigen wir einige Fakten über lipschitzstetige Abbildungen.

#### ■ Lipschitzstetige Vektorfelder

**Definition** Ein Vektorfeld  $v$  auf einem Gebiet  $\Omega \subset V$  heißt *lokal lipschitzstetig*, wenn zu jedem Punkt in  $\Omega$  eine Umgebung  $U \subset \Omega$  und ein  $L \geq 0$  existiert, so dass  $v$  auf  $U$   $L$ -lipschitzstetig ist. ✕

► A. Das Vektorfeld  $v$  auf  $\mathbb{R}$  mit  $v(x) = x^2$  ist lokal lipschitz.

B. Jedes  $C^1$ -Vektorfeld auf einem Gebiet ist lokal lipschitz aufgrund des Schrankensatzes 14.16.

C. Das Vektorfeld  $x \mapsto x^{2/3}$  ist im Punkt  $0 \in \mathbb{R}$  *nicht* lokal lipschitz. ◀

19 **Lemma K** Ist  $v$  auf dem Gebiet  $\Omega$  lokal lipschitz, so ist  $v$  auf jeder kompakten Teilmenge  $K \subset \Omega$  gleichmäßig lipschitz. ✕

◀◀◀ Sei  $K \subset \Omega$  kompakt. Wäre  $v$  *nicht* gleichmäßig lipschitz auf  $K$ , so existierten zu jedem  $n \geq 1$  Punkte  $x_n \neq y_n$  in  $K$  derart, dass

$$\|v(x_n) - v(y_n)\| \geq n \|x_n - y_n\|.$$

Also ist

$$\|x_n - y_n\| \leq \frac{2}{n} \sup_{x \in K} \|v(x)\| \leq \frac{2M}{n}, \quad n \geq 1,$$

denn  $\|v\|$  ist auf  $K$  stetig und daher beschränkt.

Da  $K$  kompakt ist, besitzt die Folge  $(x_n)$  eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert  $p \in K$ . Die entsprechende Teilfolge von  $(y_n)$  konvergiert dann wegen der vorangehenden Abschätzung ebenfalls gegen  $p$ . Da aber  $v$  in einer Umgebung von  $p$  Lipschitz ist, ergibt sich für hinreichend große  $n$  ein Widerspruch zur Wahl von  $x_n$  und  $y_n$ .  $\gggg$

Lipschitzstetige Funktionen auf kompakten Teilmengen eines normierten Raumes lassen sich nun zu Lipschitzstetigen Funktionen auf dem gesamten Raum fortsetzen, ohne die Lipschitzkonstante zu verschlechtern.

- 20 **Lemma L** Sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$   $L$ -Lipschitz auf einer nichtleeren abgeschlossenen Teilmenge  $M$  von  $V$ . Dann existiert eine Fortsetzung  $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f$  mit derselben Lipschitzkonstante  $L$ .  $\times$

$\llll$  Nach Voraussetzung gilt

$$|f(u) - f(v)| \leq L \|u - v\|, \quad u, v \in M. \quad (6)$$

Fixieren wir irgendein  $u_0$  in  $M$ , so gilt für jedes  $x \in V$  und  $u \in M$  aufgrund der Dreiecksungleichung die obere Abschätzung

$$\begin{aligned} f(u) - L \|x - u\| &\leq f(u_0) + |f(u) - f(u_0)| - L \|x - u\| \\ &\leq f(u_0) + L \|u - u_0\| - L \|x - u\| \\ &\leq f(u_0) + L \|x - u_0\|. \end{aligned}$$

Die linke Seite ist somit für alle  $u \in M$  gleichmäßig beschränkt und damit

$$\phi: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x) := \sup_{u \in M} (f(u) - L \|x - u\|)$$

wohldefiniert. Aus (6) folgt andererseits  $f(v) \geq f(u) - L \|v - u\|$  und deshalb

$$\sup_{u \in M} (f(u) - L \|v - u\|) = f(v), \quad v \in M.$$

Also ist  $\phi = f$  auf  $M$  und damit  $\phi$  eine Fortsetzung von  $f$  auf ganz  $V$ .

Nun gilt für jedes  $y \in V$

$$\phi(x) \geq f(u) - L \|y - u\| - L \|x - y\|, \quad u \in M.$$

Also gilt dies auch für das Supremum über  $u \in M$  und deshalb

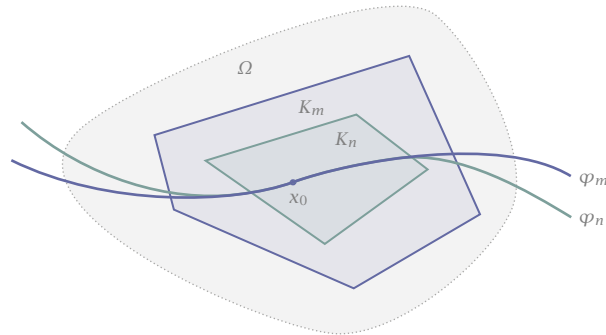
$$\phi(x) \geq \phi(y) - L \|x - y\|.$$

Dasselbe gilt mit den Rollen von  $x$  und  $y$  vertauscht, so dass wir insgesamt

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L \|x - y\|$$

erhalten. Somit ist  $\phi$   $L$ -Lipschitz auf  $V$ .  $\gggg$

Abb 5 Konstruktion einer maximalen Lösungskurve



**Korollar** Jedes lipschitzstetige Vektorfeld auf einer kompakten Menge in  $V$  besitzt eine lipschitzstetige Fortsetzung auf ganz  $V$ .  $\times$

«»» Wähle eine beliebige Basis in  $V$ , und setze jede einzelne Komponentenfunktion mit dem vorangehenden Lemma auf ganz  $V$  fort. Die Behauptung für die daraus resultierende Fortsetzung des gesamten Vektorfeldes folgt, weil alle Normen in  $V$  äquivalent sind. »»»

### ■ Lokale Lösungen

- 21 **Lokaler EE-Satz** Das Vektorfeld  $v$  sei auf einem Gebiet  $\Omega$  lokal lipschitzstetig. Dann besitzt jedes zugehörige Anfangswertproblem eine eindeutige maximale Lösung.  $\times$

«»» Zu jedem Gebiet  $\Omega$  existiert eine *Ausschöpfung*

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \Omega, \quad \bigcup_{n \geq 1} K_n = \Omega,$$

durch kompakte Teilmengen - zum Beispiel

$$K_n = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Omega^c) \geq 1/n \wedge \|x\| \leq n\}.$$

Aufgrund von Lemma  $K_{19}$  ist die Einschränkung  $v|_{K_n}$  gleichmäßig lipschitzstetig, und aufgrund von Lemma  $L_{20}$  kann es von dort zu einem gleichmäßig lipschitzstetigen Vektorfeld  $v_n$  auf ganz  $V$  fortgesetzt werden.

Ist  $x_0 \in \Omega$  ein beliebiger Anfangswert, so ist  $x_0 \in K_{n_0}$  für ein  $n_0 \geq 1$ . Für jedes  $n \geq n_0$  existiert dann eine eindeutige globale Lösung  $\varphi_n$  zum Vektorfeld  $v_n$  und Anfangswert  $x_0$ , und zu dieser ein größtes *offenes* Intervall  $I_n \ni 0$  mit

der Eigenschaft

$$\varphi_n(I_n) \subset K_n.$$

Eventuell gilt auch  $\varphi_n(I_n^-) \subset K_n$ , aber das ist unerheblich. Wegen  $K_n \subset K_{n+1}$  gilt auch  $I_n \subset I_{n+1}$  für  $n \geq n_0$  sowie

$$\varphi_m|_{I_n} = \varphi_n, \quad m \geq n.$$

Setze jetzt

$$J := \bigcup_{n \geq n_0} I_n$$

und definiere  $\varphi: J \rightarrow \Omega$  durch  $\varphi|_{I_n} = \varphi_n$ . Aufgrund des Eindeutigkeitsatzes 8 ist  $\varphi$  eine wohldefinierte Lösung zum Anfangswert  $x_0$  innerhalb von  $\Omega$ .

Um ihre Maximalität zu zeigen, betrachte beispielsweise

$$J_+ = J \cap [0, \infty) = [0, b), \quad 0 < b \leq \infty.$$

Ist  $b = \infty$ , so ist  $J_+$  sicher maximal. Sei also  $b < \infty$ . Gäbe es eine Lösung zum selben Anfangswert über den Zeitpunkt  $b$  hinaus, so existierte  $\lim_{t \nearrow b} \varphi(t)$ , und der kompakte Kurvenabschnitt  $\varphi([0, b])$  wäre im Innern einer der kompakten Mengen  $K_n$  enthalten. Dies aber widerspricht der Definition der Intervalle  $I_n$  und  $J$ . Somit ist  $J_+$  maximal.  $\gggg$

Der *maximale Fluss* eines Vektorfeldes  $v$  ist die Bündelung aller seiner maximalen Lösungskurven. Wir setzen

$$\Xi = \bigcup_{x \in \Omega} J_x \times \{x\} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega : t \in J_x\},$$

wobei  $J_x$  das maximale Existenzintervall der Lösungskurve zum Anfangswert  $x$  bezeichnet, und definieren

$$\Phi: \Xi \rightarrow \Omega, \quad (t, x) \mapsto \varphi(t, x).$$

- 22 **Satz** Die Menge  $\Xi$  ist eine offene Umgebung von  $\{0\} \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \Omega$ , und  $\Phi$  ist ein maximaler Fluss auf  $\Omega$  bestehend aus maximalen Lösungskurven des Vektorfeldes  $v$ .  $\times$

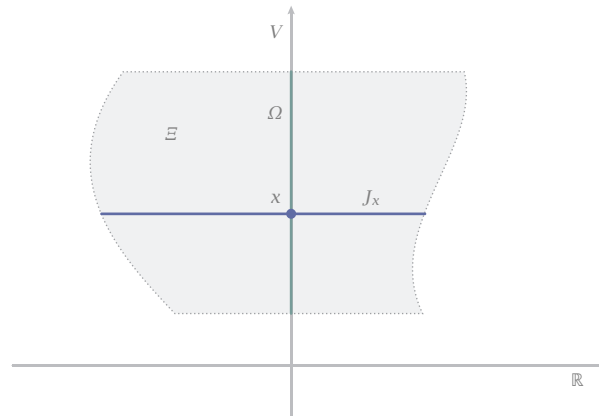
$\llll$  Dies ist als Übung überlassen 6.  $\gggg$

Lokal gilt für den maximalen Fluss dasselbe wie für den globalen Fluss im Flusssatz 13, also

$$\Phi^0(x) = x, \quad \Phi^{t+s} = \Phi^t(\Phi^s(x)),$$

wann immer alle Ausdrücke definiert sind.

Abb 6

Die Menge  $\mathcal{E}$ 

## 17.5

## Konjugation von Vektorfeldern und Flüssen

Um eine Differentialgleichung zu verstehen, kann man nach geeigneten Koordinaten suchen, in denen sie besonders einfach wird – das ist die sogenannte *Transformationsmethode*. Damit stellt sich die Frage, wie sich Vektorfelder und Differentialgleichungen unter Koordinatentransformationen überhaupt transformieren.

- Transformation von Vektorfeldern

Gegeben seien ein Vektorfeld  $v$  auf einem Gebiet  $\Omega$  in  $V$  und ein Diffeomorphismus

$$T : \Omega \rightarrow \Theta$$

von  $\Omega$  auf ein weiteres Gebiet  $\Theta$  in  $V$ . Das transformierte Vektorfeld  $w$  auf  $\Theta$  ist natürlicherweise dadurch charakterisiert, dass  $T$  Lösungskurven  $\varphi$  von  $v$  in Lösungskurven  $\psi$  von  $w$  abbildet. Für die Kurve  $\psi = T \circ \varphi$  soll also gelten

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= (T \circ \varphi)' = (DT \circ \varphi)\dot{\varphi} = (DT \circ \varphi)v(\varphi) \\ &\stackrel{!}{=} w(\psi) = w(T \circ \varphi). \end{aligned}$$

Vergleich beider Gleichungen ergibt

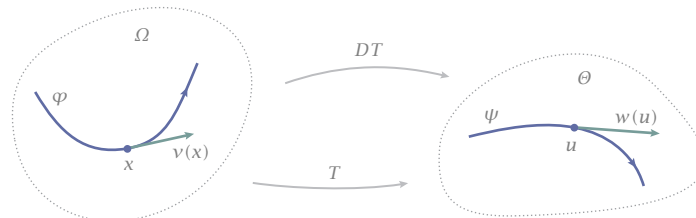
$$w(T \circ \varphi) = (DT \circ \varphi)v(\varphi).$$

Betrachten wir  $\varphi = \varphi(t, x)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ , so erhalten wir

$$w(T(x)) = DT(x)v(x), \quad x \in \Omega.$$



Abb 7 Zum Transformationsgesetz



Damit erhalten wir folgendes

- 23 **Transformationsgesetz** Ein Diffeomorphismus  $T: \Omega \rightarrow \Theta$  transformiert ein Vektorfeld  $v$  auf  $\Omega$  in ein Vektorfeld  $w$  auf  $\Theta$  gemäß der Gleichung

$$w \circ T = DT \cdot v. \quad \times$$

Diese Gleichung lässt sich sowohl nach  $v$  als auch nach  $w$  auflösen. Auflösen nach  $w$  ergibt

$$w = DT \cdot v \circ T^{-1} =: T_* v.$$

Man transportiert also  $v$  von  $\Omega$  mit der Tangentialabbildung  $DT$  weiter nach  $\Theta$ , weshalb man  $T_* v$  den *push forward* von  $v$  nennt.

Auflösen nach  $v$  ergibt

$$v = DT^{-1} w \circ T =: T^* w.$$

Man holt also  $w$  mit der inversen Tangentialabbildung  $DT^{-1}$  von  $\Theta$  zurück nach  $\Omega$ , weshalb man  $T^* w$  den *pull back* von  $w$  nennt. Beide Gleichungen sind äquivalent, aber die zweite ist technisch meist einfacher, da nur die lineare Abbildung  $DT$  invertiert wird statt der im Allgemeinen nichtlinearen Abbildung  $T$ .

**Definition** Zwei Vektorfelder  $v$  auf  $\Omega$  und  $w$  auf  $\Theta$  heißen  *$C^1$ -konjugiert*, falls es einen Diffeomorphismus  $T: \Omega \rightarrow \Theta$  gibt, so dass  $T_* v = w$ .  $\times$

*Bemerkung a.* Der push forward  $T_* v$  ist auch erklärt, wenn  $T$  nicht surjektiv ist, sondern eine sogenannte *Einbettung*.

*b.* Der pull back  $T^* w$  ist auch erklärt, wenn  $T$  nur ein *lokaler*, aber kein globaler Diffeomorphismus ist. Dies ist beispielsweise bei den Polarkoordinaten der Fall – siehe nächstes Beispiel.

*c.* Praktisch transformiert man Vektorfelder durch direktes Differenzieren der Gleichung  $\psi = T \circ \varphi$  statt die Transformationsformel zu bemühen.  $\rightarrow$

► A. Sei  $\dot{x} = Ax$  und  $y = Tx$  mit einem linearen Isomorphismus  $T: V \rightarrow V$ . Dann ist

$$\dot{y} = (Tx)' = T\dot{x} = TAx \stackrel{!}{=} By = BTx,$$

also  $TA = BT$ . Somit erhalten wir

$$A = T^*B = T^{-1}BT, \quad B = T_*A = TAT^{-1},$$

wobei  $T^*$  hier *nicht* die adjungierte Abbildung zu  $T$  bezeichnet.

B. Betrachte das Vektorfeld  $v$  mit  $v(x) = x^2$  auf  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Mit

$$T: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, \quad x = -\frac{1}{y}$$

erhält man

$$\dot{x} = x^2 = \frac{1}{y^2} \stackrel{!}{=} \left(-\frac{1}{y}\right)' = \frac{\dot{y}}{y^2},$$

also  $\dot{y} = 1$ . Also ist

$$T^*v = \mathbf{1}, \quad T_*\mathbf{1} = v,$$

wenn  $\mathbf{1}$  das konstante Vektorfeld mit Wert 1 bezeichnet.

C. Die Abbildung

$$(r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

definiert Polarkoordinaten in der Ebene außerhalb des Nullpunkts. Sie ist ein lokaler, jedoch kein globaler Diffeomorphismus. Daher ist lediglich der pull back definiert. Eine direkte Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta. \end{aligned}$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit  $x = r \cos \theta$ , der zweiten mit  $y = r \sin \theta$  und Addition ergibt

$$x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r} \cos^2 \theta + r\dot{r} \sin^2 \theta = r\dot{r},$$

also

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}.$$

Analog erhält man

$$\dot{\theta} = \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{r^2}.$$

Diese Gleichungen sind für  $r > 0$  wohldefiniert. ◀

■ **Konjugation von Flüssen**

Können zwei Vektorfelder durch einen Diffeomorphismus ineinander transformiert werden, so betrachtet man diese als *äquivalent*. Ihre Lösungskurven werden dann durch diesen Diffeomorphismus aufeinander abgebildet – das war ja auch der Ausgangspunkt des Transformationsgesetzes. Aber nicht nur das – auch ihre Flüsse sind zueinander konjugiert.

Zunächst die Definition. Flüsse bezeichnen wir von nun an wieder mit kleinen griechischen Buchstaben, da sie ohnehin aus Lösungskurven bestehen.

**Definition** Zwei Flüsse  $\varphi$  auf  $\Omega$  und  $\psi$  auf  $\Theta$  heißen *lokal  $C^1$ -konjugiert*, falls es einen Diffeomorphismus  $T: \Omega \rightarrow \Theta$  gibt, so dass

$$T \circ \varphi^t = \psi^t \circ T$$

in einem offenen  $t$ -Intervall um 0 für jeden Anfangswert in  $\Omega$ . Mit anderen Worten, es kommutiert das in Abbildung 8 links stehende Diagramm. ✕

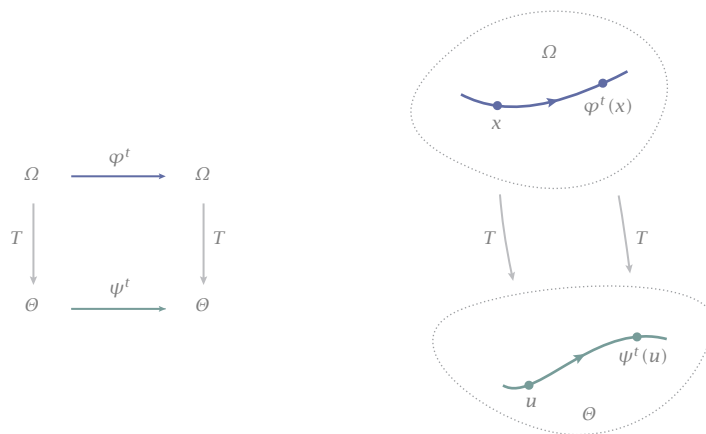
24 **Satz** Zwei Vektorfelder sind  $C^1$ -konjugiert genau dann, wenn ihre Flüsse lokal  $C^1$ -konjugiert sind ✕

⋘⋘⋘ ⋚ Sind die Flüsse lokal konjugiert, so gilt für jedes  $x \in \Omega$

$$T \circ \varphi^t = \psi^t \circ T$$

lokal um jeden Punkt auf einem kleinen  $t$ -Intervall um 0. Ableiten nach  $t$  bei  $t = 0$  ergibt dann

Abb 8 Konjugation von Flüssen



$$DT(\varphi^0)\dot{\varphi}^0 = \dot{\psi}^0 \circ T.$$

Mit  $\dot{\varphi}^0 = v$  und  $\dot{\psi}^0 = w$  folgt

$$DT \cdot v = w \circ T.$$

Also sind auch die Vektorfelder konjugiert.

⇒ Es gelte umgekehrt die letzte Gleichung. Dann gilt lokal um  $t = 0$

$$\begin{aligned} (T \circ \varphi^t)' &= DT(\varphi^t)\dot{\varphi}^t = DT(\varphi^t)v(\varphi^t) \\ &= (DT \cdot v) \circ \varphi^t \\ &= (w \circ T) \circ \varphi^t = w(T \circ \varphi^t). \end{aligned}$$

Somit ist  $T \circ \varphi^t(x)$  eine lokale Lösungskurve des Vektorfeldes  $w$  zum Anfangswert  $T(x)$ . Dasselbe gilt aber auch für die Kurve  $\psi^t(T(x))$ . Aufgrund des EE-Satzes ist also  $T(\varphi^t(x)) = \psi^t(T(x))$  für kleine  $t$ , sprich

$$T \circ \varphi^t = \psi^t \circ T. \quad \gggg$$

*Bemerkung* Offensichtlich kann man Flüsse auch *topologisch* konjugieren – also per Homöomorphismus –, Vektorfelder aber nicht, da die Jacobische eines Homöomorphismus ja nicht definiert ist. Man nennt daher Vektorfeld *topologisch konjugiert*, wenn ihre Flüsse topologisch konjugiert sind. Dieser wesentlich flexiblere Konjugationsbegriff ist für das Studium dynamischer Systeme wichtig. →

#### ■ Der Rektifizierungssatz

Wir können nun den einfachsten Satz in der Klassifikation von Vektorfeldern beweisen. Er betrifft ihre Gestalt lokal um *reguläre Punkte*.

**Definition** Ein Punkt  $p$  heißt *singulärer Punkt* eines Vektorfeldes  $v$ , falls

$$v(p) = 0.$$

Andernfalls heißt er *regulärer Punkt*. ✕

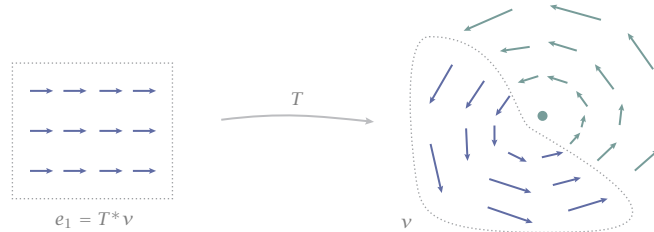
25 **Rektifizierungssatz** Lokal um einen regulären Punkt  $p$  ist ein  $C^1$ -Vektorfeld  $C^1$ -konjugiert zu einem konstanten Vektorfeld. ✕

⟨⟨⟨ Wir betrachten den Standardfall eines Vektorfeldes  $v = (v_1, \dots, v_n)$  auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass

$$p = 0, \quad v_1(0) \neq 0.$$

Es existiert dann eine Umgebung  $I \times U$  von  $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , auf der der Fluss von  $v$  erklärt ist und eine  $C^1$ -Abbildung  $\varphi: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert. Auf einer

Abb 9 Der Rektifizierungssatz



noch festzulegenden kleinen Umgebung  $W$  von  $0 \in \mathbb{R}^n$  definieren wir damit eine Abbildung

$$T: W \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad u \mapsto T(u) = \varphi^{u_1}(0, \hat{u}),$$

wobei  $u = (u_1, \dots, u_n)$  und  $\hat{u} = (u_2, \dots, u_n)$ . Das Bild von  $u$  ist also der Punkt der Lösungskurve zum Anfangswert  $(0, \hat{u})$  am Zeitpunkt  $u_1$  – siehe Abbildung 10.

Für diese Abbildung gilt dann

$$\frac{\partial T}{\partial u_1}(0) = \dot{\varphi}^t(0, \hat{u}) \Big|_0 = \dot{\varphi}^0(0) = v(0)$$

und – indem wir erst  $t = 0$  setzen und dann nach  $u_i$  differenzieren –

$$\frac{\partial T}{\partial u_i}(0) = \frac{\partial \varphi^0}{\partial u_i}(0) = e_i, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Also ist

$$DT(0) = \left( \frac{\partial T_i}{\partial u_j} \right) = \begin{pmatrix} v_1(0) & 0 & \dots & 0 \\ v_2(0) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n(0) & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

und somit

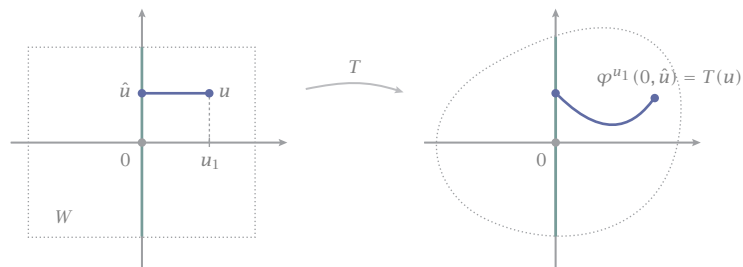
$$\det DT(0) = v_1(0) \neq 0.$$

Also ist  $T$  ein *lokaler Diffeomorphismus*. Wählen wir also  $W$  hinreichend klein, so ist  $T$  ein Diffeomorphismus von  $W$  auf eine Umgebung von  $T(0) = 0$ .

Diese Abbildung  $T$  konjugiert die Flüsse von  $e_1$  und  $v$ . Der Fluss von  $e_1$  ist

$$\psi^t(u) = u + te_1 = (u_1 + t, u_2, \dots, u_n).$$

Mit der Definition von  $T$  folgt

Abb 10 Definition der Abbildung  $T$ 

$$\begin{aligned}
 (\varphi^t \circ T)(u) &= \varphi^t \circ \varphi^{u_1}(0, \hat{u}) \\
 &= \varphi^{t+u_1}(0, \hat{u}) \\
 &= T(t + u_1, \hat{u}) = T \circ \psi^t(u).
 \end{aligned}$$

Also gilt

$$\varphi^t \circ T = T \circ \psi^t.$$

Da  $T$  die Flüsse von  $\nu$  und  $e_1$  konjugiert, konjugiert  $T$  auch die Vektorfelder selbst <sub>24</sub>. >>>>

Damit ist klar, dass reguläre Punkte eines Vektorfeldes *lokal völlig uninteressant* sind. Interessant sind nur die singulären Punkte – wie im richtigen Leben. Dies ist allerdings nur ein *lokales* Bild. Es erlaubt keinerlei Aussage über das globale Verhalten der Lösungskurven – ob es sich beispielsweise um periodische, quasiperiodische oder chaotische Bahnen handelt.