Ana-2 Vü-7

Ss 2021 24.06.21

1 Sei $A \subset V$ nicht leer. Ist A konvex, so gilt

$$(s+t)A = sA + tA, \qquad s,t \geqslant 0.$$

Für nicht-konvexes A gilt dies im Allgemeinen nicht.

Notation: $sA = \{ sa : a \in A \}$

$A + B = \{ a + b : a \in A, b \in B \}$

(i) $(s+t)A \subseteq sA + tA$:

$x \in (s+t)A$

$\Rightarrow \quad x = (s+t)a$ für ein $a \in A$

$\Rightarrow \quad x = \underbrace{sa}_{\in sA} + \underbrace{ta}_{\in tA}$

$\Rightarrow \quad x \in sA + tA$.

(ii) $(s+t)A \supseteq sA + tA$: OE $s,t > 0$

$x \in sA + tA$

$\Rightarrow \quad x = sa + tb$ für zwei $a,b \in A$

$\Rightarrow \quad x = \underbrace{(s+t)}_{>0} \Big(\underbrace{\underbrace{\tfrac{s}{s+t}}_{>0} a + \underbrace{\tfrac{t}{s+t}}_{>0} b}_{\text{Konvexkombination}} \Big)$

$\qquad \qquad \qquad \qquad = c$

$\Rightarrow \quad x = (s+t) \cdot c$, $c \in A$, da A konvex.

$\Rightarrow \quad x \in (s+t)A$.

$$\left(\underbrace{\frac{s}{s+t}} a + \underbrace{\frac{t}{s+t}} b \right)$$

$$\frac{s}{s+t} + \frac{t}{s+t} = \frac{s+t}{s+t} = 1 \quad :)$$

Gegenbeispiel:

$$A = \{0,1\} \subset \mathbb{R}$$

$s = t = 1$:

$$(1+1)A = 2A = \{0,2\} \neq$$

$$1A + 1A = A + A = \{0,1,2\}$$

$\blacksquare$

2 Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen. Man beweise oder widerlege:
a. $f+g$ ist konvex. *b.* fg ist konvex. *c.* $f \circ g$ ist konvex.

a. Ist so: $h = f+g$:

$$h((1-t)a + tb)$$

$$= f(\ldots) + g(\ldots)$$

$$\underset{f,g \text{ konvex}}{\leq} (1-t) f(a) + t f(b) + (1-t) g(a) + t g(b)$$

$$= (1-t)(f(a) + g(a)) + t(f(b) + g(b))$$

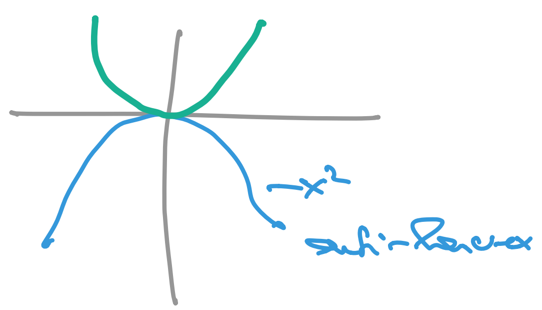
$$= (1-t) h(a) + t h(b). \checkmark$$

b. $h = fg$? Gegenbeispiel:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x \\ g(x) &= -x \end{aligned}\right\} \text{linear, also konvex}$$

Aber:

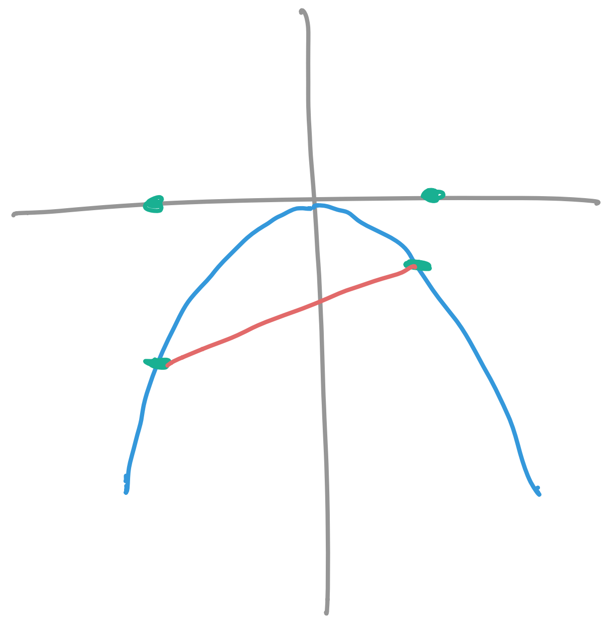
$$h(x) = (fg)(x) = -x^2$$



f anti-konvex

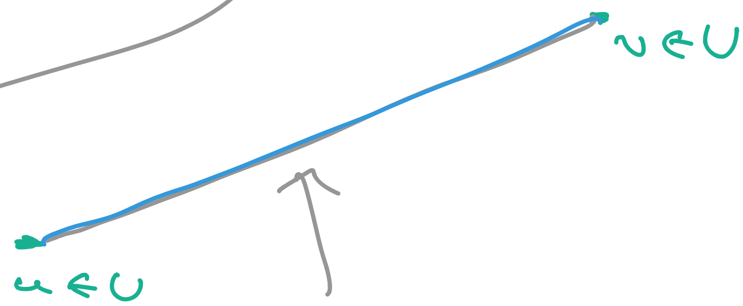
$\Longleftrightarrow$ f konkav

$\Longleftrightarrow$ $-f$ konvex

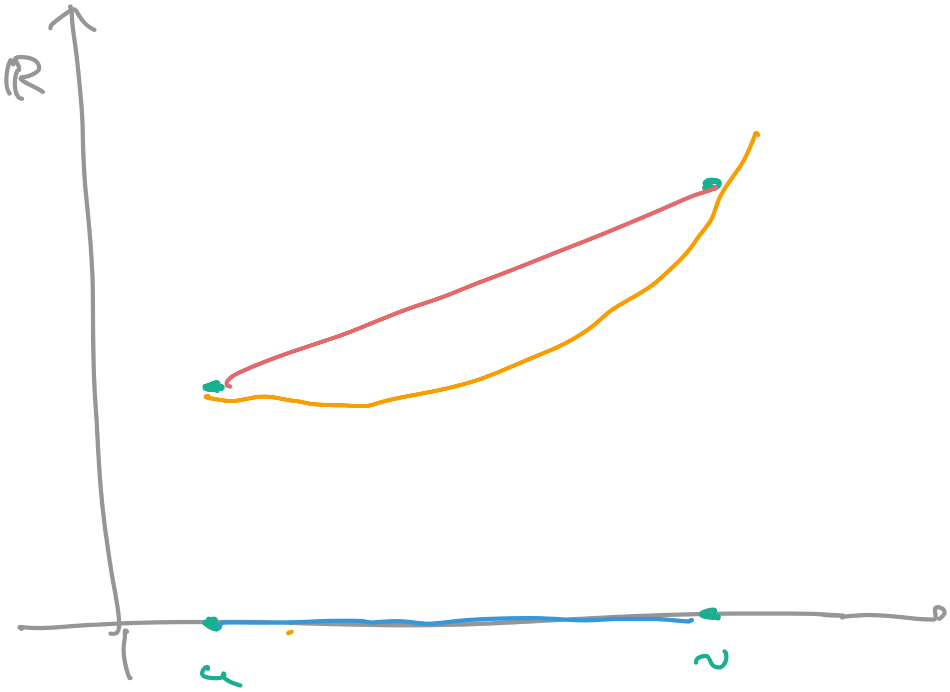


$$f((1-t)u + tv) \leq (1-t)f(u) + t f(v)$$

"unterhalb"



kein



c. $f \circ g$?

$$f(x) = -x$$
$$g(x) = x^2$$

Concav.

nicht konvex

$$(f \circ g)(x) = -x^2 .$$

3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer und konvex. Ist

$$f = (f_1, .., f_m)^\top : \ \Omega \to \mathbb{R}^m$$

eine Abbildung, wo jede Komponente $f_j : \Omega \to \mathbb{R}$ konvex ist, und

$$g : \ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

konvex und komponenenweise monoton wachsend, so ist auch

$$g \circ f : \ \Omega \to \mathbb{R}$$

konvex.

Direkte Rechnung: $h = g \circ f$:

$$h\big((1-t)u + tv\big)$$

$$= g\Big(\dots, \underbrace{f_j\big((1-t)u + tv\big)}_{\leq (1-t) f_j(u) + t f_j(v)}, \dots\Big)$$

$$\leq g\big(\dots, (1-t) f_j(u) + t f_j(v), \dots\big)$$

Komp. weise Monotonie

$$= g\Big(\underbrace{(1-t) f(u) + t f(v)}_{\text{als Vektor}}\Big)$$

$$\leq (1-t)\, g(f(u)) + t\, g(f(v))$$

Konvexität von g

$$= (1-t)\, h(u) + t\, h(v)$$

4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer und konvex. Ist

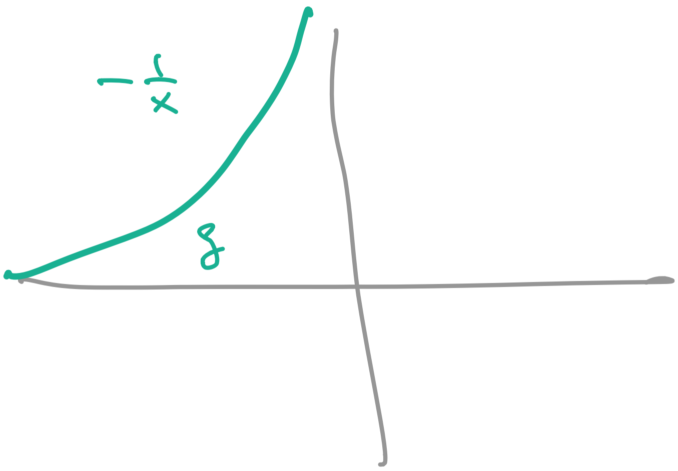
$$f: \Omega \to (0,\infty)$$

anti– konvex, so ist $-1/f$ konvex.

Mit Aufgabe 3: Wähle

$g: (-\infty, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(x) = -\frac{1}{x}$ konvex & wachsend



Dann ist

$g \circ (-f) = -\frac{1}{-f} = \frac{1}{f}$

konvex.

Richtig ist: f antikonvex

$\Longleftrightarrow -f$ konvex

$\Longrightarrow \frac{1}{f} = -\frac{1}{(-f)}$

5 Für $x_1,..,x_n > 0$ und $\alpha_1,..,\alpha_n \geqslant 0$ mit $\alpha_1 + .. + \alpha_n = 1$ gilt

$$\underbrace{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}}_{\text{geom. Mittel}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i . \quad \text{arithm. Mittel}$$

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lg(\quad) \le \lg(\quad)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sum \alpha_i \lg x_i \le \lg(\underbrace{\sum \alpha_i x_i}_{\text{Konvexkomb.}})$$

Dies gilt, weil lg anti-konvex