1 Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des Dgl-Systems

$$\dot{x}_1 = 3x_1$$
$$\dot{x}_2 = 3x_2 + x_3$$
$$\dot{x}_3 = x_1 + 2x_3.$$

2 Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des Dgl-Systems

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_2$$
$$\dot{x}_3 = 2x_3.$$

3 Die aus einer Fundamentallösung in einem Koordinatensystem gebildete Matrix

$$M(t) = [\varphi_1(t), .., \varphi_n(t)]$$

heißt *Fundamentalmatrix*. Für diese gilt

$$M(t)M(t_0)^{-1} = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}$$

für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$. Unter welchen Bedingungen ist $M(t)$ eine 1-Parametergruppe?

4 Für welche Parameter a, b besitzt die Gleichung $\ddot{u} + a\dot{u} + bu = 0$ eine nichttriviale Lösung u

a. ohne Nullstellen,
b. mit endlich vielen Nullstellen,
c. mit unendlich vielen Nullstellen?

1 Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des Dgl-Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 \\ \dot{x}_2 &= 3x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 + 2x_3. \end{aligned}$$

▹ *Lösung* Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & 1 \\ 1 & & 2 \end{pmatrix},$$

die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$ mit Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zu λ_2 gibt es keinen zweiten Eigenvektor, nur einen Nebenvektor v_3. Lösen von $Av_3 = 3v_3 + v_2$ ergibt

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ein Fundamentalsystem ist daher

$$v_1 \mathrm{e}^{2t}, \quad v_2 \mathrm{e}^{3t}, \quad (v_3 + tv_2)\mathrm{e}^{3t}. \quad ◃$$

2 Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des Dgl-Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 \\ \dot{x}_3 &= 2x_3. \end{aligned}$$

▹ *Lösung* Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

ist bereits in Jordanscher Normalform. Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$ mit Eigenvektor $v_1 = e_1$ und Nebenvektor $v_2 = e_2$ sowie $\lambda = 3 = 2$ mit Eigenvektor $v_3 = e_3$. Ein fundamentalsystem ist demnach

$$e_1 \mathrm{e}^{t}, \quad (e_2 + te_1)\mathrm{e}^{t}, \quad e_3 \mathrm{e}^{2t}. \quad ◃$$

3 Die aus einer Fundamentallösung in einem Koordinatensystem gebildete Matrix

$$M(t) = [\varphi_1(t), .., \varphi_n(t)]$$

heißt *Fundamentalmatrix*. Für diese gilt

$$M(t)M(t_0)^{-1} = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}$$

für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$. Unter welchen Bedingungen ist $M(t)$ eine 1-Parametergruppe?

▷ *Lösung* Für $\Phi(t) = M(t)M(t_0)^{-1}$ gilt

$$\dot{\Phi}(t) = \dot{M}(t)M(t_0)^{-1} = AM(t)M(t_0)^{-1} = A\Phi(t)$$

sowie $\Phi(t_0) = I$. Daher ist

$$\Phi(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}.$$

Eine 1-Parametergruppe bildet dies genau dann, wenn $\Phi(0) = I$. ◁

4 Für welche Parameter a, b besitzt die Gleichung $\ddot{u} + a\dot{u} + bu = 0$ eine nichttriviale Lösung u

a. ohne Nullstellen,
b. mit endlich vielen Nullstellen,
c. mit unendlich vielen Nullstellen?

▷ *Lösung* Mit

$$x_1 = u,$$
$$x_2 = \dot{u},$$

ist die Differenzialgleichung äquivalent zu dem System

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{u} = -bx_1 1 - ax_2,$$

oder

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + a\lambda + b = \ddot{u} + a\dot{u} + bu\Big|_{u^{(i)} \to \lambda^i},$$

die Diskriminante des 2×2-Systems also

$$\Delta = a^2 - 4b.$$

Lösungen mit keiner oder genau einer Nullstelle treten genau dann auf, wenn das charakteristische Polynom nur reelle Nullstellen besitzt, also

$$\Delta = a^2 - 4b \geqslant 0$$

gilt. Andernfalls haben alle Lösungen unendlich viele Nullstellen. ◁