Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 2 (SS 2019) — Blatt 15

Don't panic.
Douglas Adams (1952-2001)

Das folgende Aufgabenblatt dient zur Vorbereitung auf die Modulprüfung

15.1. **(a)** Bestimmen Sie im Falle ihrer Existenz die folgenden uneigentlichen Integrale.

$$\textbf{(i)} \int_0^\infty x^2 \mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{(ii)} \int_1^2 \frac{x^2-3x+2x}{x^3-2x^2-x+2}\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{(iii)} \int_0^1 \sqrt{1+x^{-\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}x$$

(b) Gegeben sei

$$F(x) := \int_x^{x^2} \frac{(x+y)^2}{y^3-2y^2+y-2}\,\mathrm{d}y.$$

Berechnen Sie $F'(3)$.

(c) Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \gamma \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad \int_r^\infty \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x < \infty$$

für jedes $r > 0$. Zeigen Sie, dass für beliebige $\alpha, \beta > 0$

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\gamma$$

gilt.

15.2. **(a)** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\textbf{(i)} \sum_{n=1}^\infty \frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \qquad \textbf{(ii)} \sum_{n=2}^\infty \int_n^{n+1} \frac{x+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{(iii)} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{1+n}{n}\right)\right)$$

(b) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, so dass die Reihen

$$\textbf{(i)} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\left(\frac{x-2}{x}\right)^n, \qquad \textbf{(ii)} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\mathrm{e}^{nx}+\mathrm{e}^{-nx}}$$

konvergieren.

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^\infty a_n < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{1+a_n} < \infty$$

gilt.

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

15.3. **(a)** Bestimmen Sie die Länge der Kurve

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Bogenlängendarstellung der Kurve

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$$

(c) Untersuchen Sie, ob die Kurve

$$\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := \begin{pmatrix} t \\ |t| \end{pmatrix}$$

rektifizierbar ist.

15.4. **(a)** Untersuchen Sie die Funktionenfolgen

$$\textbf{(i)}\ f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) := n^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}, \qquad \textbf{(ii)}\ f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \sin\left(\frac{x}{n}\right),$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(b) Sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine auf einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktionenfolge mit Werten in einer kompakten Menge $B \subseteq \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $g : A \to B$ konvergiert. Sei weiterhin $f : B \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$h_n : A \to B,\ h_n(x) := f\left(g_n(x)\right),$$

gleichmäßig gegen die Funktion $h := f \circ g$ konvergiert.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funtkion mit

$$|f(x)| \leq a|x|$$

für ein $a \in (0, 1)$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Sei weiterhin die Funktionenfolge $f_n := f \circ \ldots \circ f$ für $n \in \mathbb{N}$ die n-fache Iteration dieser Abbildung. Zeigen Sie:

(i) Es gilt

$$|f_n(x)| \leq a^n|x|.$$

(ii) Die Funktionenfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch $g_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig auf jeder kompakten Menge von $\mathbb{R}$.

15.5. **(a)** Zeigen Sie, dass es sich bei

$$\|\cdot\|_1 : C([0, 3]) \to \mathbb{R}, \quad \|f\|_1 := \int_0^3 |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

um eine Norm handelt.

(b) Zeigen Sie, dass der Raum $C([0, 3], \|\cdot\|_1)$ nicht vollständig ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$T : C([0,3]) \to \mathbb{R},\ Tf := f(3)$$

linear ist.

(d) Untersuchen Sie die Abbildung T aus Aufgabenteil **(c)** bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$ aus Aufgabenteil **(a)** und der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf Stetigkeit.

15.6. **(a)** Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^3+y^6}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f im Punkt $(0,0)$ partiell differenzierbar ist. Ist f dort Gâteaux-differenzierbar? Ist f dort Fréchet-differenzierbar?

(b) Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := (3 - x^2 - y^2)\,\mathrm{e}^{-y}.$$

(i) Geben Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $p = (1,-1)$ in Richtung $v = (2,1)$ an.

(ii) Geben Sie Art und Lage aller Extrema der Funktion f an.

(iii) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f im Entwicklungspunkt $(0,-1)$.