Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 2 (SS 2019) — Blatt 13

Wenn man alles berechnet, gelingt nichts.
Romano Prodi

Aufgaben zur Abgabe am 11. Juli

13.1. Gegeben sei die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x)=(x_1^3+x_2^3)^{\frac{1}{3}},\qquad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$

wobei hier der reelle Zweig der dritten Wurzel gewählt ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Richtungsableitung von f im Punkt $x_0=0$ für jede Richtung existiert.

(b) Bestimmen Sie für jede Richtung h die Richtungsableitung von f.

(c) Zeigen Sie, dass die Richtungsableitung nicht notwendigerweise additiv in h ist.

(d) Wieso kann f im Punkt $x_0=0$ nicht Fréchet-differenzierbar sein?

13.2. Sei $C^1([0,1],\mathbb{R})$ der Raum aller stetig differenzierbaren Funktionen $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Wir definieren auf diesem Raum die Abbildungen

$$\|\cdot\|_C : C^1([0,1],\mathbb{R})\to\mathbb{R},\ f\mapsto \|f\|_C := \max_{x\in[0,1]}|f(x)|,$$
$$\|\cdot\|_{C^1} : C^1([0,1],\mathbb{R})\to\mathbb{R},\ f\mapsto \|f\|_{C^1} := \|f\|_C+\|f'\|_C$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei $\|\cdot\|_C$ und $\|\cdot\|_{C^1}$ um Normen handelt.

(b) Zeigen Sie, dass $C^1([0,1],\mathbb{R},\|\cdot\|_{C^1})$ vollständig und $C^1([0,1],\mathbb{R},\|\cdot\|_C)$ nicht vollständig ist.

Votieraufgaben

13.3. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x_1,x_2):=\begin{cases}\left(x_1^2+x_2^2\right)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right), & (x_1,x_2)\neq(0,0)\\ 0, & (x_1,x_2)=(0,0)\end{cases}$$

eine Fréchet-differenzierbare Funktion ist, deren partielle Ableitungen nicht stetig im Punkt $(0,0)$ sind.

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

13.4. Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen Fréchet-differenzierbar sind und berechnen Sie die entsprechenden Ableitungen.

(a) $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ F_1(x) = \begin{pmatrix} 1+x \\ x^2 \end{pmatrix}$.

(b) $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ F_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

(c) $F_3 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ F_3(x) = x^T Ax$, wobei A eine reellwertige $n \times n$- Matrix ist.

(d) $F_4 : C([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ F_4 f = \int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x$.

(e) $F_5 : C([0,1], \mathbb{R}) \to C([0,1], \mathbb{R}),\ (F_5 f)(x) = \sin(f(x))$.

13.5. Gegeben sei die Funktion

$$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(nx_1)\mathrm{e}^{-nx_1x_2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar ist und berechnen Sie $\partial_{x_1} f$ und $\partial_{x_2} f$.

(c) Zeigen Sie, dass f Fréchet-differenzierbar ist.

13.6. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad $r \in \mathbb{N}$, falls für alle $\lambda > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$

$$f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$$

gilt. Beweisen Sie:

(a) Ist f Fréchet-differenzierbare und homogen vom Grad r, dann gilt

$$\langle x, \nabla f(x) \rangle = rf(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},$$

wobei $\nabla f(x) := (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x))^T$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne.

(b) Ist f partiell-differenzierbar und homogen vom Grad r, dann sind die partiellen Ableitungen $\partial_j f, j = 1, \ldots, n$ homogen vom Grad $r - 1$.