Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 2 (SS 2019) — Blatt 2

Nature laughs at the difficulties of integration.
(Pierre-Simon Laplace; 1749-1827)

Aufgaben zur Abgabe in der Vorlesung am 18. April

2.1. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es existiert ein $J \in \mathbb{R}$, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\Lambda_\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle Zerlegungen δ mit Rang $\lambda(\delta) < \Lambda_\varepsilon$ und alle Stützstellensätze ξ

$$|J - \sigma(f;\delta,\xi)| < \varepsilon$$

gilt.

(ii) Sei $\{\delta^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Zerlegungen mit Stützstellensätzen $\{\xi^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\lambda(\delta^{(n)}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dann konvergiert $\sigma(f;\delta^{(n)},\xi^{(n)})$ und der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Folgen $\{\delta^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{\xi^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(iii) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\Lambda_\varepsilon > 0$, so dass für alle Zerlegungen δ und δ' mit $\lambda(\delta), \lambda(\delta') < \Lambda_\varepsilon$ und allen Stützstellensätzen ξ und ξ'

$$|\sigma(f;\delta,\xi) - \sigma(f;\delta',\xi')| < \varepsilon$$

gilt.

2.2. **(a)** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Angenommen, f ist stetig auf $[a,b]\backslash A$, wobei $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\} \subset [a,b],\ N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{R}[a,b]$ gilt.

(b) Sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$ und $\beta_j, \gamma_j \in [a,b],\ j \in \{1\dots,N\}$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Sei weiterhin

$$\widetilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R},\ \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a,b]\backslash\{\beta_1,\dots,\beta_N\} \\ \gamma_j, & x = \beta_j \end{cases}$$

Zeigen Sie $\tilde{f} \in \mathcal{R}[a,b]$ und

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \widetilde{f}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe zur Abgabe in der Vorlesung am 25. April

2.3. Bezeichne ABC ein nicht-gleichseitiges Dreick. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Alle Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt S.

(b) Alle Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt U.

(c) Alle Höhen schneiden sich in einem Punkt H.

(d) Die Punkte S, U, H liegen auf einer Geraden und es gilt das Verhältnis $\overline{HS} : \overline{SU} = 2 : 1$.

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de