Analysis 2 (SS 2019) — Blatt 9

Die Mathematik ist mehr ein Tun als eine Lehre.
(L. E. J. Brouwer)

Aufgaben zur Abgabe am 6. Juni

9.1. Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz nach Cesàro bzw. Poisson-Abel:

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots$$

9.2. Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(a) $f_n(x) = x^n - x^{n+1},\ x \in [0,1]$

(b) $f_n(x) = x^n - x^{2n},\ x \in [0,1]$

(c) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^k},\ x \in [0,1]$

(d) $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n,\ x \in [a,b],\ b > a$

Votieraufgaben

9.3. **(a)** Zeigen Sie, dass eine Konstante $\gamma \in (0,1)$ existiert mit

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

(b) Zeigen Sie mithilfe von Aufgabenteil **(a)**:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$$

Hinweis: Betrachten Sie s_{2n}.

9.4. Gegeben sei die Funktion

$$\zeta : (1,\infty) \to \mathbb{R},\ \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Zeigen sie, dass ζ folgende Produktdarstellung besitzt:

$$\zeta(x) = \prod_{p\in\mathbb{N},\ p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-x}}$$

Hinweis: Jeder Faktor ist Grenzwert einer geometrischen Reihe.

9.5. Untersuchen Sie die folgenden Reihen in Abhängigkeit von $x, y \in \mathbb{R}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + y^n},\ y \geq 0$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+y^n)}{n^x},\ y \geq 0$

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de